УДК 517.518.366

И. Н. Бруй
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

СРЕДНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА (стендовый доклад)

1. Введение. Оператор присваивания «$:=$» означает, что правой части присвоено обозначение, стоящее слева от него. В самом начале рассматриваются следующие пространства функций одного вещественного переменного: 1) $\mathbf{L}^\infty[0,1]$ — несепарабельное полное комплексное пространство всех измеримых и существенно-ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций; полунорма $\|f\|_{\mathbf{L}^\infty[0,1]} := ess\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|$; 2) $\mathbf{L}^1[0,1]$ — сепарабельное полное комплексное пространство Г. Штейнгауза всех измеримых и интегрируемых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций; полунорма $\|f\|_{\mathbf{L}^1[0,1]} := \int_0^1 |f(x)|\,dx$; 3) при показателе $1 < p < +\infty$ сепарабельное полное комплексное пространство Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$ всех функций на отрезке $[0,1]$, измеримых и с интегрируемой по Лебегу на нём p-ой степенью их модуля; полунорма $\|f\|_{\mathbf{L}^p[0,1]} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$. Очевидны строгие включения: $\mathbf{L}^\infty[0,1] \underset{\ne}{\subset} \mathbf{L}^p[0,1] \underset{\ne}{\subset} \mathbf{L}^1[0,1]$.

Тригонометрический ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} \sin n2\pi x \tag{1}$$

1) сходится в каждой точке x вещественной прямой и 2) не является тригонометрическим рядом Фурье — Лебега ни своей поточечной суммы $s(x) := \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln n} \sin n2\pi x$, ни другой функции $f \in \mathbf{L}^1[0,1]$ [1, с. 11, с. 148, 7.3.4, с. 154, 7.7, с. 189, 10.1.6(2); 2, с. 95, теорема 1, с. 123, с. 199, с. 671, пример; 3, с. 298, (1.17), с. 403, (2.1); 4, с. 275, (1), с. 276]. Сумма этого ряда $s \notin \mathbf{L}^1[0,1]$, ибо в противном случае ряд (1) по теореме Дюбуа—Реймона и Валле Пуссена [4, с. 293, теорема 5] являлся бы рядом Фурье—Лебега своей суммы s.

Тригонометрический ряд (1) мотивирует постановку следующей трудной и важной проблемы: «Когда ортогональный ряд является ортогональным рядом Фурье функции из заранее заданного пространства функций».

2. Базисные понятия. Последовательность $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ комплекснозначных функций на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой, определённых почти всюду и измеримых относительно линейной меры Лебега, называется ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системой, если

$$\forall m \in \mathbf{Z}_0 \;\; \forall n \in \mathbf{Z}_0 \;\; \int_0^1 \varphi_m(x)\overline{\varphi_n}(x)\,dx = \begin{cases} 1, \text{ когда } m = n, \\ 0, \text{ когда } m \ne n, \end{cases} \tag{2}$$

где $\overline{\varphi_n}$ означает функцию, комплексно сопряжённую к функции φ_n.

Условие ортонормированности (2) влечёт: 1) принадлежность всех функций φ_n и их комплексных сопряжений $\overline{\varphi_n}$ функциональному пространству Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$; 2) отличие всех функций $\varphi_n(x)$ от нуля на множестве положительной меры: $\forall n \in \mathbf{Z}_0$ $\operatorname{mes}\{x \in [0,1] : \varphi_n(x) \ne 0\} > 0$.

Если на отрезке $[0, 1]$ функция f и ортонормированная система $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ таковы, что интегрируемы все произведения $f \cdot \overline{\varphi_n}$, то числовая последовательность $\left(\int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt\right)_{n=0}^{+\infty}$ называется последовательностью коэффициентов Фурье функции f относительно ортонормированной на отрезке $[0, 1]$ системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$, а функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt \cdot \varphi_n(x) \tag{3}$$

называется рядом Фурье функции f по ортонормированной на отрезке $[0, 1]$ системе $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$.

Нечётная и периодическая с периодом 2 функция $f_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$ хотя и неинтегрируема по Лебегу на отрезке $[0, 1]$: $f_1 \notin \mathbf{L}^1[0, 1]$, но имеет все равные единице коэффициенты Фурье относительно ортонормированной синус-системы $\left(\sqrt{2}\sin n\pi x\right)_{n=1}^{+\infty}$: $\forall n \in \mathbf{Z}_1 := \{1, 2, 3, ...\}$ $\int_0^1 f_1(t)\sqrt{2}\sin n\pi t\,dt = 1$ [3, с. 84].

На отрезке $[0, 1]$ для ортонормированной косинус-системы $\left(\sqrt{2}\cos n\pi x\right)_{n=0}^{+\infty}$ и для ортонормированной тригонометрической системы $\left(1, \sqrt{2}\cos 2\pi x, \sqrt{2}\sin 2\pi x, \sqrt{2}\cos 4\pi x, \sqrt{2}\sin 4\pi x, ..., \sqrt{2}\cos n2\pi x, \sqrt{2}\sin n2\pi x, ...\right)$ условие $f \in \mathbf{L}^1[0, 1]$ влечёт существование всех коэффициентов Фурье функции f относительно соответствующих систем. Более общо, если на отрезке $[0, 1]$ все функции ортонормированной системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ существенно-ограничены: $\forall n \in \mathbf{Z}_0$ $\operatorname{ess\,sup}_{0 \le x \le 1} |\varphi_n(x)| < +\infty$, то условие $f \in \mathbf{L}^1[0, 1]$ влечёт существование всех коэффициентов Фурье функции f относительно этой системы.

3. Регулярные матричные средние ортогональных рядов и классические пространства функций. Предположим, что для любой функции $f \in \mathbf{L}^p[0, 1]$, $1 \le p \le +\infty$, конечны все её коэффициенты Фурье $\int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt$ $(n \in \mathbf{Z}_0)$ относительно ортонормированной на отрезке $[0, 1]$ системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$. Тогда система $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ называется полной (vollständig) относительно пространства $\mathbf{L}^p[0, 1]$, если равенство нулю всех коэффициентов Фурье функции $f \in \mathbf{L}^p[0, 1]$ относительно системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ влечёт равенство нулю функции f почти всюду на отрезке ортонормированности $[0, 1]$: $\left[\forall n \in \mathbf{Z}_0 \ \int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt = 0\right] \Rightarrow f(x) \underset{0 \le x \le 1}{\overset{\text{п.в.}}{=}} 0$.

Комплексная последовательность $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ и ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ система $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ порождают ортогональный на отрезке $[0, 1]$ ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\varphi_n(x). \tag{4}$$

Теорема Ф. Рисса—Э. Фишера [5, с. 116, 3.8.3]. *П р е д п о л о ж е н и е : система* $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ *ортонормированных на отрезке* $[0, 1]$ *функций* $\varphi_n(x)$ *полна относительно сепарабельного полного комплексного пространства Гильберта* $\mathbf{L}^2[0, 1]$.

У т в е р ж д е н и е : для того чтобы ортогональный на отрезке $[0, 1]$ *ряд (4) являлся ортогональным рядом Фурье некоторой функции* $f \in \mathbf{L}^2[0, 1]$*:* $\exists f \in \mathbf{L}^2[0, 1]$ $\forall n \in \mathbf{Z}_0$ $a_n = \int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился вещественный ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$ *из квадратов модулей его коэффициентов.*

Краткая запись утверждения фундаментальной теоремы Ф. Рисса—Э. Фишера: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\varphi_n(x) \in \mathbf{L}^2[0, 1] \iff (a_n)_{n=0}^{+\infty} \in l^2(\mathbf{Z}_0)$.

В заключении последней эквивалентности отсутствуют функции $\varphi_n(x)$. Для пространств $\mathbf{L}^p[0,1]$ с показателем $p \neq 2$ это уже не так.

Теорема В. Орлича—Зб. Ломницкого [5, с. 251—255, 6.4.1, 6.4.2, 6.4.3, с. 257—259, 6.4.6]. *П р е д п о л о ж е н и я : 1) все функции ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *принадлежат несепарабельному полному комплексному пространству* $\mathbf{L}^\infty[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней треугольной вещественной матрицы* $M := \left\lfloor \mu_n^{(N)} \right\rfloor_{(N,n)\in \mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$*, во-первых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные вариации:* $\sup_{N\in\mathbf{Z}_0} \sum_{n=0}^{N} \left|\mu_n^{(N)} - \mu_{n+1}^{(N)}\right| < +\infty$*, во-вторых, имеют по всем столбцам единичный предел:*

$$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \;\; \exists \lim_{N\to+\infty} \mu_n^{(N)} = 1\,; \tag{5}$$

3) описанные выше ортонормированная система $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица* M *связаны между собой условием*

$$A_1 := \sup_{N\in\mathbf{Z}_0} \, ess\sup_{0\le x\le 1} \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)}\, \varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n}(t) \right| dt < +\infty\,, \tag{6}$$

означающим равномерную ограниченность почти всюду на отрезке ортонормированности $[0,1]$ *всех* M*-функций Лебега ортонормированной системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$.

У т в е р ж д е н и е : для того чтобы ортогональный на отрезке $[0,1]$ *ряд (4) являлся ортогональным рядом Фурье некоторой функции* $f \in \mathbf{L}^p[0,1]$, $1 \le p \le +\infty$*, необходимо и достаточно, чтобы*

А) при $1 < p \le +\infty$ *последовательность его регулярных* M*-средних была ограниченной в пространстве* $\mathbf{L}^p[0,1]$*:* $\sup_{N\in\mathbf{Z}_0} \left\| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)}\, a_n\, \varphi_n(x) \right\|_{\mathbf{L}^p[0,1]} < +\infty$*;*

Б) при показателе $1 \le p < +\infty$ *последовательность его регулярных* M*-средних сходилась в пространстве* $\mathbf{L}^p[0,1]$*:* $\lim_{\substack{M\to+\infty\\ N\to+\infty}} \left\| \sum_{n=0}^{M} \mu_n^{(M)}\, a_n\, \varphi_n(x) - \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)}\, a_n\, \varphi_n(x) \right\|_{\mathbf{L}^p[0,1]} = 0$*;*

В) при $1 \le p \le +\infty$ *для любой функции* h *из сопряжённого полного комплексного пространства* $\mathbf{L}^q[0,1]$, $1/p + 1/q = 1$*, комплексный ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \overline{\int_0^1 h(t)\, \overline{\varphi_n}(t)\, dt} \tag{7}$$

суммировался регулярным матричным методом M*:* $\forall h \in \mathbf{L}^q[0,1]$ $\exists \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)}\, a_n \cdot \overline{\int_0^1 h(t)\, \overline{\varphi_n}(t)\, dt} \in \mathbf{C}$.

Предположение 3) необходимо для справедливости утверждений А) и В) при $p = +\infty$ [5, с. 253] и утверждений Б) и В) при показателе $p = 1$ [5, с. 255]. Для пространств Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1 < p < +\infty$, предположение 3) уже не является необходимым [5, с. 255—256].

4. Пространства Орлича. Подобно тому как естественным обобщением пространства Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$ явились пространства Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$, $1 < p < +\infty$, так и естественным обобщением последних являются пространства В. Орлича $\mathbf{L}^\phi[0,1]$.

Пусть на вещественной прямой $\mathbf{R}$ задана неотрицательная вещественная функция ϕ. Функция $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ называется выпуклой на $\mathbf{R}$, если для любых двух точек x_1 и x_2 вещественной прямой $\mathbf{R}$ выполняется условие $\phi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{\phi(x_1) + \phi(x_2)}{2}$. Геометрически это означает, что середина любой хорды графика функции ϕ лежит либо над графиком функции, либо на нём. В нашем случае «выпуклость» влечёт «непрерывность».

Выпуклая функция $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ называется функцией Юнга, если она 1) чётная: $\forall x \in \mathbf{R}$ $\phi(-x) = \phi(x)$, 2) обращается в нуль в начале координат: $\phi(0) = 0$, 3) бесконечно большая при $x \to +\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$. Например, выпуклая функция $|x|^p$, где показатель степени $1 \le p < +\infty$, является функцией Юнга. Функция $\forall y \in \mathbf{R}$ $\psi(y) := \sup\left\{ x|y| - \phi(x) : x \ge 0 \right\}$ называется дополнительной в смысле

Юнга к функции $\phi(x)$. Примеры: 1) если $\phi_1(x) := |x|^p / p$, где показатель $1 < p < +\infty$, то $\psi_1(y) = |y|^q / q$, где сопряжённый показатель q связан с p условием $1/p + 1/q = 1$; 2) если $\phi_2(x) := e^{|x|} - |x| - 1$, то $\psi_2(y) = (1 + |y|)\ln(1 + |y|) - |y|$.

Пусть $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ есть функция Юнга. Пространством Орлича $\mathbf{L}^\phi[0,1]$ называется комплексное линейное пространство всех на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой измеримых функций f, для которых существует такое положительное вещественное число $\alpha(f) > 0$, что конечен интеграл $\int_0^1 \phi\left[\alpha(f) \cdot |f(t)|\right] dt$, с обычными операциями сложения функций и умножения их на комплексные числа. Краткая запись определения пространства Орлича —

$$\mathbf{L}^\phi[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbf{C},\ \text{изм.} : \exists \alpha(f) > 0 \ \int_0^1 \phi\left[\alpha(f) \cdot |f(t)|\right] dt < +\infty \right\}.$$

Функция Юнга $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ называется N-функцией (nice Young function), если она 1) обращается в нуль только в точке нуль: $\phi(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$, 2) бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с x при $x \to 0$: $\lim_{x \to 0} \phi(x)/x = 0$, 3) бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с x при $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \phi(x)/x = +\infty$. Дополнительная в смысле Юнга к N-функции $\phi(x)$ функция $\psi(y)$ является N-функцией. В абзаце перед определением пространства Орлича $\mathbf{L}^\phi[0,1]$ все компоненты пар (ϕ_1, ψ_1) и (ϕ_2, ψ_2) примеров 1) и 2) суть N-функции. Функция Юнга $|x|$ не является N-функцией.

При N-функции $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ пространство $\mathbf{L}^\phi[0,1]$ полно относительно полунормы Орлича

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\phi[0,1]} := \sup \left\{ \int_0^1 |f(t) \cdot g(t)|\, dt : \int_0^1 \psi\left(|g(t)|\right) dt \le 1 \right\},$$

где $\psi(y)$ есть дополнительная в смысле Юнга к $\phi(x)$ N-функция. Если N-функция $\phi_1(x) := |x|^p / p$, где $1 < p < +\infty$, то полунорма Орлича $\|f\|_{\mathbf{L}^{\phi_1}[0,1]} = q^{1/q} \|f\|_{\mathbf{L}^p[0,1]}$, где сопряжённый показатель q определяется равенством $1/p + 1/q = 1$.

Говорят, что функция Юнга $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если она бесконечно большая медленного роста при $x \to \infty$, т. е. если существуют две вещественные постоянные $A_2 > 0$ и $x_1 \ge 0$, такие, что $\forall x \in [x_1, +\infty)$ выполняется неравенство $\phi(2x) \le A_2 \phi(x)$. Функция Юнга $|x|$ не является N-функцией, но удовлетворяет Δ_2-условию. Функция Юнга $\phi_2(x) := e^{|x|} - |x| - 1$ является N-функцией, но не удовлетворяет Δ_2-условию. Дополнительная в смысле Юнга к $\phi_2(x)$ функция $\psi_2(y) = (1 + |y|)\ln(1 + |y|) - |y|$ является N-функцией и удовлетворяет Δ_2-условию.

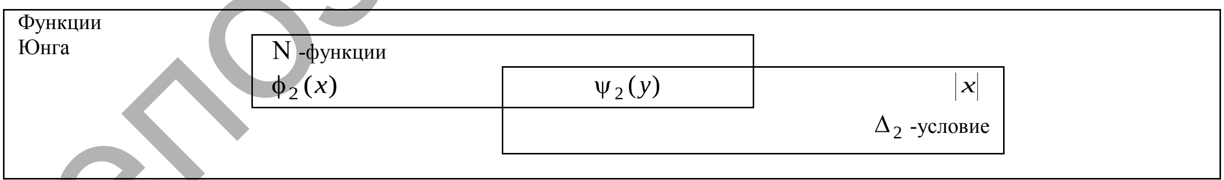

Рисунок 1 — Функции Юнга

Из рисунка 1 видно, что такие характеристики функций Юнга $\phi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$, как N-функция и Δ_2-условие суть логически разные характеристики.

5. Матричные средние ортогональных рядов и пространства Орлича. Для несепарабельного полного комплексного пространства $\mathbf{L}^\infty[0,1]$ и сепарабельного полного комплексного пространства Г. Штейнгауза $\mathbf{L}^1[0,1]$ имеем:

$$\mathbf{L}^\infty[0,1] = \bigcap_{\phi \in \mathrm{N}} \left\{ f : \int_0^1 \phi\left(|f(t)|\right) dt < +\infty \right\} \subset \mathbf{L}^1(T) = \bigcup_{\phi \in \mathrm{N}} \left\{ f : \int_0^1 \phi\left(|f(t)|\right) dt < +\infty \right\} \subset \bigcup_{\phi \in \mathrm{N}} \mathbf{L}^\phi[0,1],$$

где пересечение и объединения берутся по всем N-функциям $\phi(x)$.

Теорема. *П р е д п о л о ж е н и я : 1) все функции ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *принадлежат несепарабельному полному комплексному пространству* $\mathbf{L}^\infty[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней треугольной вещественной матрицы* $M := \left[\mu_n^{(N)}\right]_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$ *имеют по всем столбцам единичный предел (5); 3) описанные выше ортонормированная система* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица* M *связаны между собой условием (6), означающим равномерную ограниченность почти всюду на отрезке ортонормированности* $[0,1]$ *всех* M*-функций Лебега ортонормированной системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$.

У т в е р ж д е н и е : для того чтобы ортогональный на отрезке $[0,1]$ *ряд (4) являлся ортогональным рядом Фурье некоторой функции* f *из полного комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^\phi[0,1]$*, необходимо и достаточно, чтобы*

А) при N*-функции* $\phi(x)$ *последовательность его* M*-средних была ограниченной в пространстве* $\mathbf{L}^\phi[0,1]$*:*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\left\|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\,\varphi_n(x)\right\|_{\mathbf{L}^\phi[0,1]}<+\infty\,; \tag{8}$$

Б) при N*-функции* $\phi(x)$*, удовлетворяющей к тому же* Δ_2*-условию, последовательность его* M*-средних сходилась в пространстве* $\mathbf{L}^\phi[0,1]$*:*

$$\lim_{\substack{M\to+\infty\\ N\to+\infty}}\left\|\sum_{n=0}^{M}\mu_n^{(M)}\,a_n\,\varphi_n(x)-\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\,\varphi_n(x)\right\|_{\mathbf{L}^\phi[0,1]}=0\,, \tag{9}$$

что в рассматриваемом случае $\mathrm{N}\ni\phi\in\Delta_2$ *равносильно как сходимости в среднем:*

$$\lim_{\substack{M\to+\infty\\ N\to+\infty}}\int_0^1\phi\left[\left|\sum_{n=0}^{M}\mu_n^{(M)}\,a_n\,\varphi_n(x)-\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\,\varphi_n(x)\right|\right]dx=0\,,$$

так и ограниченности в среднем:

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\int_0^1\phi\left[\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\,\varphi_n(x)\right|\right]dx<+\infty\,;$$

В1) при N*-функции* $\phi(x)$ *и дополнительной в смысле Юнга к ней* N*-функции* $\psi(y)$*, удовлетворяющей к тому же* Δ_2*-условию, для любой функции* h *из сепарабельного полного комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^\psi[0,1]$ *комплексный ряд (7) суммировался матричным методом* M*:*

$$\forall h\in\mathbf{L}^\psi[0,1]\ \ \exists\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,a_n\cdot\overline{\int_0^1 h(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt}\in\mathbf{C}\,; \tag{10}$$

В2) при N*-функции* $\phi(x)$*, удовлетворяющей к тому же* Δ_2*-условию, для любой функции* h *из полного комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^\psi[0,1]$*, где* $\psi(y)$ *есть дополнительная в смысле Юнга к* $\phi(x)$ N*-функция, комплексный ряд (7) суммировался матричным методом* M.

Утверждение А) теоремы было анонсировано автором в [6, с. 7—8, теорема].

В утверждениях Б) и В2) теоремы полное комплексное пространство Орлича $\mathbf{L}^\phi[0,1]$ является сепарабельным.

Когда M-средние ортогонального на отрезке $[0,1]$ ряда (4) являются регулярными, то из нашей теоремы имеем в случае $\mathbf{L}^\phi[0,1]$ стартовые теоремы З. Бирнбаума и В. Орлича [7, с. 61, теорема 1, с. 63, теорема 2, с. 65, теоремы 3 и 3'], причём в утверждениях А) и В1) без их предположения, что N-функция $\phi(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, а в случае $\mathbf{L}^p[0,1]$ — теорему В. Орлича—Зб. Ломницкого.

Из нашей теоремы в случае регулярных M-средних тригонометрического ряда получаем теоремы эстонского математика М. Тыннова [8, с. 67, теорема 1, с. 69, теорема 2, с. 72, теорема 6, с. 73, теорема 7].

Бесконечная нижняя треугольная вещественная матрица $S := [\max\{0,\ N-n+1\}]_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$ порождают регулярные частичные суммы. Предположению 3) нашей теоремы удовлетворяют S-функции Лебега системы Хаара (тождественны единице) и системы Франклина [5, с. 184, замечание; 9, с. 203, 221], однако не удовлетворяют S-константы Лебега систем тригонометрической {их рост подобен логарифмической функции [1, с. 134, (7.1.8); 2, с. 115, (35.15); 3, с. 115, (12.1)]} и функций Уолша в нумерации Пэли {мажоранта их роста подобна логарифмической функции [9, с. 34; 10, с. 46, теорема 2.2.1]}.

6. Доказательство утверждения A) теоремы об ортогональных на отрезке $[0,1]$ $\mathbf{L}^{\phi}$**-рядах** сводится к доказательству лемм 1 и 2. M-средние ряда Фурье (3) функции f по ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системе $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ обозначим через

$$\forall N\in\mathbf{Z}_0\quad M_N(f,x) := \sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\cdot\int_0^1 f(t)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt\cdot\varphi_n(x). \tag{11}$$

Лемма 1. *П р е д п о л о ж е н и я : 1) все функции ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *принадлежат несепарабельному полному комплексному пространству* $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней треугольной вещественной матрицы* $M := [\mu_n^{(N)}]_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$ *имеют по всем столбцам конечные пределы:*

$$\forall n\in\mathbf{Z}_0\quad \exists\lim_{N\to+\infty}\mu_n^{(N)} =: \rho_n\in\mathbf{C}; \tag{12}$$

которые отграничены от нуля:

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}_0}|\rho_n| > 0. \tag{13}$$

3) описанная выше ортонормированная система $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *и матрица* M *связаны между собой условием (6), означающим равномерную ограниченность почти всюду на отрезке ортонормированности* $[0,1]$ *всех* M*-функций Лебега ортонормированной системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$.

У т в е р ж д е н и я : 1) когда функция $\phi(x)$ *и дополнительная в смысле Юнга к ней функция* $\psi(y)$ *являются функциями Юнга, то принадлежность функции* f *комплексному пространству Орлича* $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ *влечёт ограниченность последовательности* M*-средних (11) её ортогонального ряда Фурье (3) в пространстве* $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$*:*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\|M_N(f,\circ)\|_{\mathbf{L}^{\phi}[0,1]} < +\infty; \tag{14}$$

2) когда N*-функция* $\phi(x)$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию, то принадлежность функции* f *сепарабельному полному комплексному пространству Орлича* $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ *влечёт неравенство*

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\|M_N(f,\circ)\|_{\mathbf{L}^{\phi}[0,1]} \le A_2\,\|f(\circ)\|_{\mathbf{L}^{\phi}[0,1]}, \tag{15}$$

где постоянная $A_2>0$ *не зависит от* f*, т. е.* $\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\|M_N(\circ,x)\|_{L^{\phi}[0,1]\to L^{\phi}[0,1]} < +\infty$.

Доказательство. Ш а г 1. Из очевидных в силу свойства ортонормированности (2) интегральных представлений

$$\forall (N,m)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0\quad \mu_m^{(N)}\cdot\varphi_m(x) = \int_0^1\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\,\varphi_m(t)\,dt$$

для почти всех $x\in[0,1]$ имеем

$$\left|\mu_m^{(N)}\right|\cdot|\varphi_m(x)| \le ess\sup_{0\le t\le 1}|\varphi_m(t)|\cdot\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt.$$

Отсюда получаем

$$\left|\mu_m^{(N)}\right| \cdot ess\sup_{0\le x\le 1}\left|\varphi_m(x)\right| \le ess\sup_{0\le t\le 1}\left|\varphi_m(t)\right| \cdot \int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)}\, \varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n}(t)\right| dt\,. \tag{16}$$

Так как условие ортонормированности (2) влечёт отличие всех функций $\varphi_n(x)$ от нуля на множестве положительной меры и в силу предположения 1) леммы 1 все функции $\varphi_n \in \mathbf{L}^{\infty}[0,1]$, то из (16) с учётом предположения 3) леммы 1 имеем

$$\sup_{(N,m)\in \mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}\left|\mu_m^{(N)}\right| \le A_1 < +\infty\,, \tag{17}$$

т. е. имеем ограниченность элементов матрицы M в совокупности.

Из предположений 1), 2) и 3) леммы 1 вытекает, что мажоранта $A_1 > 0$. В самом деле, допущение $A_1 = 0$ в силу (17) повлекло бы $\inf_{n\in\mathbf{Z}_0}\left|\rho_n\right| = 0$, т. е. невыполнение условия (13).

Ш а г 2. Пусть функция f принадлежит комплексному пространству Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$. Тогда согласно определению пространства Орлича существует такое положительное вещественное число $\alpha(f) > 0$, что конечен интеграл

$$\int_0^1 \phi\left[\alpha(f)\cdot\left|f(t)\right|\right]dt < +\infty\,. \tag{18}$$

Воспользуемся очевидным интегральным представлением

$$\forall N \in \mathbf{Z}_0 \quad M_N(f,x) = \int_0^1 f(t)\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\,dt \tag{19}$$

M-средних (11) ряда Фурье (3) функции f по ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системе $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$. Так как функция Юнга ϕ возрастает на $[0,+\infty)$, то с учётом интегральных представлений (19) для произвольного фиксированного $N \in \mathbf{Z}_0$ имеем

$$\phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3}\left|M_N(f,x)\right|\right] \le \phi\left[\int_0^1 \alpha(f)\cdot\left|f(t)\right|\left|\frac{1}{A_3}\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt\right], \tag{20}$$

где $A_3 := \max\left\{1, A_1\right\}$.

Ш а г 3. Если точка $x \in [0,1]$ такова, что $\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt \ge 1$, то из (20) в силу возрастания ϕ на $[0,+\infty)$ и неравенства (6) в виде

$$\sup_{N\in\mathbf{Z}_0}\; ess\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt \le A_3 < +\infty\,, \tag{21}$$

получаем

$$\phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3}\left|M_N(f,x)\right|\right] \le \phi\left[\frac{\int_0^1 \alpha(f)\cdot\left|f(t)\right|\cdot\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt}{\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt}\right].$$

Отсюда на основании интегрального неравенства Иенсена [11, с. 20, (8)] имеем

$$\phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3}\left|M_N(f,x)\right|\right] \le \frac{\int_0^1 \phi\left[\alpha(f)\cdot\left|f(t)\right|\right]\cdot\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt}{\int_0^1\left|\sum_{n=0}^{N}\mu_n^{(N)}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n}(t)\right|dt}\,.$$

Из предыдущего, с учётом того, что на рассматриваемом шаге $\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| dt \ge 1$, получаем

$$\phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right] \le \int_0^1 \phi[\alpha(f) \cdot |f(t)|] \cdot \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| dt . \tag{22}$$

Ш а г 4. Если же точка $x \in [0,1]$ такова, что $\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| dt < 1$, то из (20) в силу возрастания ϕ на $[0,+\infty)$ и неравенства $A_3 \ge 1$ имеем

$$\phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right] \le \phi\left[\int_0^1 \alpha(f) \cdot |f(t)| \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| dt \right].$$

Отсюда в силу [11, с. 21, (10)] — следствия из интегрального неравенства Иенсена — получаем (22).

Ш а г 5. Согласно шагам 3 и 4 неравенство (22) справедливо для почти всех $x \in [0,1]$. Проинтегрируем его по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 \phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right] dx \le \int_0^1 \int_0^1 \phi[\alpha(f) \cdot |f(t)|] \cdot \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| dt\, dx .$$

Изменение порядка интегрирования в правой части предыдущего неравенства приводит к повторному интегралу

$$\int_0^1 \phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right] dx \le \int_0^1 \phi[\alpha(f) \cdot |f(t)|]\, dt \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| dx . \tag{23}$$

На основании известных свойств комплексных чисел и вещественности элементов матрицы M модуль

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t) \right| = \left| \overline{\sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n}(t)} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \overline{\varphi_n}(x) \varphi_n(t) \right| .$$

Поэтому неравенство (23) принимает вид

$$\int_0^1 \phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right] dx \le \int_0^1 \phi[\alpha(f) \cdot |f(t)|]\, dt \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} \mu_n^{(N)} \varphi_n(t) \overline{\varphi_n}(x) \right| dx .$$

Из предыдущего с учётом (21) вытекают неравенства

$$\forall N \in \mathbf{Z}_0 \quad \int_0^1 \phi\left[\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right] dx \le A_3 \int_0^1 \phi[\alpha(f) \cdot |f(t)|]\, dt . \tag{24}$$

Ш а г 6. Пусть функция $\phi(x)$ и дополнительная в смысле Юнга к ней функция $\psi(y)$ являются функциями Юнга. И пусть g есть любая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \psi\left[|g(x)| \right] dx \le 1 . \tag{25}$$

Согласно неравенству Юнга [3, с. 34, (9.1); 12, с. 150; 13, с. 6, (2)] $\forall x \in \mathbf{C} \quad \forall y \in \mathbf{C}$ $|x \cdot y| \le \phi(|x|) + \psi(|y|)$ имеем

$$\left| \frac{\alpha(f)}{A_3} M_N(f,x) \cdot g(x) \right| \le \phi\left(\frac{\alpha(f)}{A_3} \left| M_N(f,x) \right| \right) + \psi(|g(x)|).$$

Последнее неравенство проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\frac{\alpha(f)}{A_3}\int_0^1 \left| M_N(f,x)\cdot g(x)\right| dx \le \int_0^1 \phi\left(\frac{\alpha(f)}{A_3}\left| M_N(f,x)\right|\right)dx + \int_0^1 \psi\left(\left|g(x)\right|\right)dx .$$

Тогда $\forall N \in \mathbf{Z}_0$ в силу (24) и (25)

$$\frac{\alpha(f)}{A_3}\int_0^1 \left| M_N(f,x)\cdot g(x)\right| dx \le A_3\int_0^1 \phi[\alpha(f)\cdot|\, f(t)\,|]\, dt + 1 .$$

Из предыдущего получаем

$$\forall N \in \mathbf{Z}_0 \quad \int_0^1 \left| M_N(f,x)\cdot g(x)\right| dx \le \frac{A_3}{\alpha(f)}\left\{A_3\int_0^1 \phi[\alpha(f)\cdot|\, f(t)\,|]\, dt + 1\right\}.$$

Отсюда на основании неравенства (18) и определения полунормы Орлича имеем (14).

Утверждение 1) леммы 1 доказано.

Ш а г 7. Каждый n-й $(n \in \mathbf{Z}_0)$ коэффициент Фурье $\int_0^1 f(t)\ \overline{\varphi_n}(t)\, dt$ есть ограниченный линейный функционал, определённый на пространстве Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$:

$$\forall n \in \mathbf{Z}_0 \quad \left|\int_0^1 f(t)\ \overline{\varphi_n}(t)\, dt\right| \le \phi^{-1}(1)\ \|\varphi_n\|_{\mathbf{L}^{\infty}[0,1]}\ \|f\|_{\mathbf{L}^{\phi}[0,1]} .$$

Тогда $\mu_n^{(N)}\cdot\int_0^1 f(t)\ \overline{\varphi_n}(t)\, dt\cdot\varphi_n(x)$ суть ограниченные линейные операторы из пространства Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ в пространство $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$ существенно-ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций.

Следовательно, каждое N-е $(N \in \mathbf{Z}_0)$ M-среднее (11) ортогонального ряда Фурье (3) функции $f \in \mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ по ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системе $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ является ограниченным линейным оператором из $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ в $\mathbf{E}^{\phi}[0,1]$ – замыкание множества $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$ в пространстве Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$.

Если N-функция $\phi(x)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то $\mathbf{E}^{\phi}[0,1]$ является собственным подмножеством $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$: $\mathrm{N} \ni \phi \notin \Delta_2 \Rightarrow \mathbf{E}^{\phi}[0,1] \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ [14, с. 98]).

Если же N-функция $\phi(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $\mathbf{E}^{\phi}[0,1] = \mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ [13, с. 77, следствие 5; 14, с. 98]. В этом случае из (14) на основании теоремы Банаха—Штейнгауза [3, с. 265, теорема (9.5); 5, с. 30, теорема 1.5.1; 13, с. 100] заключаем, что имеет место (15) с постоянной $A_2 > 0$, не зависящей как от N так и от $f \in \mathbf{L}^{\phi}[0,1]$.

Утверждение 2) леммы 1 доказано.

Доказательство леммы 1 закончено.

Лемма 2. *П р е д п о л о ж е н и я : 1) все функции ортонормированной на отрезке* $[0,1]$ *системы* $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *принадлежат несепарабельному полному комплексному пространству* $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$*; 2) элементы бесконечной нижней треугольной вещественной матрицы* $M := \left\lfloor \mu_n^{(N)} \right\rfloor_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$ *имеют по всем столбцам единичный предел (5).*

У т в е р ж д е н и е : если при N*-функции* $\phi(x)$ *последовательность* M*-средних ортогонального на отрезке* $[0,1]$ *ряда (4) удовлетворяет условию* $\mathbf{L}^{\phi}$*-ограниченности (8), то он является ортогональным рядом Фурье (3) некоторой функции* f *из полного комплексного пространства Орлича* $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{E}^{\psi}[0,1]$ (сепарабельное) замыкание несепарабельного полного комплексного пространства $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$ существенно-ограниченных на отрезке $[0,1]$ функций в пространстве Орлича $\mathbf{L}^{\psi}[0,1]$.

При N-функции $\phi(x)$ из последовательности M-средних условия $\mathbf{L}^{\phi}$-ограниченности (8) можно [14, с. 153, теорема 14.4] выделить подпоследовательность, которая $\mathbf{E}^{\psi}$-слабо сходится {если обе N-функции $\phi(x)$ и $\psi(y)$ удовлетворяют Δ_2-условию, то понятие $\mathbf{E}^{\psi}$-слабой сходимости совпадает с обычным [14, с. 152]} к некоторой функции $f \in \mathbf{L}^{\phi}[0,1]$. Это значит, что для любых функций $u(t)$ из пространства $\mathbf{E}^{\psi}[0,1]$ — замыкания $\mathbf{L}^{\infty}[0,1]$ в пространстве Орлича $\mathbf{L}^{\psi}[0,1]$ — имеет место предельное равенство

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_0^1 u(t)\sum_{n=0}^{N_\nu}\mu_n^{(N_\nu)}\, a_n\, \varphi_n(t)\,dt = \int_0^1 u(t)\, f(t)\,dt .$$

Беря в предыдущем равенстве в качестве $u(t)$ функцию $\overline{\varphi_m}(t) \in \mathbf{L}^{\infty}[0,1] \subset \mathbf{E}^{\psi}[0,1]$, где $m \in \mathbf{Z}_0$, и учитывая условие ортонормированности (2) и определение коэффициентов Фурье функции f относительно ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системы $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$, получаем $\forall m \in \mathbf{Z}_0$ $\lim_{\nu\to+\infty}\mu_m^{(N_\nu)}\, a_m = \int_0^1 \overline{\varphi_m}(t)\, f(t)\,dt$. Отсюда, поскольку в силу предположения 2) леммы 2 элементы бесконечной нижней треугольной вещественной матрицы $M := \left\lfloor \mu_n^{(N)} \right\rfloor_{(N,n)\in\mathbf{Z}_0\times\mathbf{Z}_0}$ имеют по всем столбцам единичный предел (5), получаем $\forall m \in \mathbf{Z}_0$ $a_m = \int_0^1 \overline{\varphi_m}(t)\, f(t)\,dt$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство утверждения А) нашей теоремы закончено.

Схемы доказательства утверждений А) и Б) теоремы автор изложил ранее в [15]. Утверждения В1) и В2) доказываются с учётом [15] по известным схемам [8, с. 72–73].

Каждая сходящаяся последовательность элементов метрического пространства ограничена в нём. На примере ограниченно колеблющейся последовательности $\left((-1)^n\right)_{n=0}^{+\infty}$ видно, что обращение предыдущего утверждения в общем случае является ложным.

Согласно теореме В. Орлича – Зб. Ломницкого в сепарабельных полных комплексных пространствах Ф. Рисса $\mathbf{L}^p[0,1]$, $1 < p < +\infty$, ограниченность последовательности регулярных M-средних в пространстве $\mathbf{L}^p[0,1]$ равносильна её сходимости в этом же пространстве $\mathbf{L}^p[0,1]$. В нашем обобщении теоремы В. Орлича – Зб. Ломницкого на полные комплексные пространства Орлича $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$ происходит расщепление на случай ограниченности и на случай сходимости последовательности M-средних в $\mathbf{L}^{\phi}[0,1]$. Естественно выяснить, в каких функциональных пространствах ограниченность последовательности равносильна её сходимости, а в каких нет. Ведь было выяснено, в каких нормированных пространствах элемент наилучшего приближения единственен.

7. Заключение. Автор в своём первом стендовом докладе [16] сводку результатов по проблеме «когда тригонометрический ряд является тригонометрическим рядом Фурье функции из классических пространств периодических с периодом 2π функций $\mathbf{C}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L}^{\infty}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L}^{q}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L}^{2}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L}^{p}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{L}^{1}(T)$, где показатели $1 < p < 2$ и $2 < q < +\infty$», дополнил пространством функций ограниченной средней осцилляции $\mathbf{L}^{\infty}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathbf{BMO}(T) \underset{\neq}{\subset} \bigcap_{1<p<+\infty}\mathbf{L}^p(T)$ и пространством функций исчезающей средней осцилляции $\mathbf{C}(T) \subset \mathbf{VMO}(T) \subset \mathbf{BMO}(T)$. Для пространств Ф. Рисса $\mathbf{L}^p(T)$, $1 < p < +\infty$, последовательное рассмотрение средних Фейера, регулярных матричных средних, консервативных матричных средних, которые не порождают сходимость, и неконсервативных матричных средних, которые также не порождают сходимость, тригонометрических рядов естественно подвело к задаче поиска таких эффективных условий на элементы матрицы, из которых при $p \to 2$ следует фундаментальный результат Ф. Рисса—Э. Фишера для пространства Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$.

Во втором стендовом докладе [17] и настоящем автор результаты для тригонометрических рядов обобщает на ортогональные на отрезке $[0,1]$ ряды (4). Обобщение аппроксимационной теоремы Л. Фейера для пространства $\mathbf{C}(T)$ на пространства $\mathbf{C}^*[0,1] \subset \mathbf{C}[0,1]$ потребовало введения [17, с. 146, определение 1] понятия замкнутости (abgeschlossen) ортонормированной на отрезке $[0,1]$ системы $(\varphi_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ относительно пространства $\mathbf{C}[0,1]$ [17, с. 147, теорема 2], а обобщение фундаментальной теоремы Ф. Рисса—Э. Фишера для пространства Гильберта $\mathbf{L}^2(T)$ на пространство Гильберта $\mathbf{L}^2[0,1]$ потребовало у них введения понятия полноты (vollständig) системы $\left(\varphi_n(x)\right)_{n=0}^{+\infty}$ относительно пространства $\mathbf{L}^2[0,1]$. Предположения нашей теоремы разъяснены в: 1) [5, с. 253]; 2) [5, с. 253; 18, с. 12–13, n.° 3–5, с. 17, n.° 8; 19, с. 13, замечание]; 3) [5, с. 253 и 255; 17, с. 148].

Автор рассматривал проблему также в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ для рядов по системе: 1) $\left(\varphi_n(O,z)\right)_{n=0}^{+\infty}$ функций, ортогональных по площади открытого ограниченного множества $O\subset\mathbf{C}$, состоящего из конечного числа конечносвязных областей [20]; 2) $\left(\varphi_n(G,z)\right)_{n=0}^{+\infty}$ функций, ортогональных по спрямляемой границе ∂G жордановой области G комплексной плоскости $\mathbf{C}$ [21; 22]; 3) $\left(F_n(G,z)\right)_{n=0}^{+\infty}$ многочленов Фабера (конформно биортонормированной с тейлоровской системой) для жордановой области $G\subset\mathbf{C}$ с гладкой границей ∂G, удовлетворяющей дополнительному ограничению на её гладкость [равномерному условию Дини, ($\Leftarrow$) условию С. Я. Альпера] [23].

Список цитируемых источников

1. *Эдвардс, Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. — М. : Мир, 1985. — Т. 1. — 264 с.
2. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 936 с.
3. *Зигмунд, А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.
4. *Натансон, И. П.* Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — 480 с.
5. *Качмаж, С.* Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 507 с.
6. *Бруй, И. Н.* Методы суммирования рядов и классы функций : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.01.01 / И. Н. Бруй. — Минск : Издат. центр Белорус. гос. ун-та, 2005. — 34 с.
7. *Birnbaum, Z. W.* Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen / Z. W. Birnbaum, W. Orlicz // Studia Mathematica. — 1931. — Т. 3. — P. 1—67.
8. *Тыннов, М.* T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье / М. Тыннов / Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. — 1966. — Вып. 192. — С. 65—81.
9. *Schipp, F.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. With the collaboration of J. Pál / F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon. – Bristol ; New York : Adam Hilger, 1990. — X+560 pp.
10. *Голубов, Б. И.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения / Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов. — М. : Наука, 1987. — 344 с.
11. *Бруй, И. Н.* Абелевы средние ортогональных рядов и пространства Орлича / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2013. — № 2 (151). — С. 18—24.
12. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 744 с.
13. *Rao, M. M.* Theory of Orlicz spaces / M. M. Rao, Z. D. Ren. — New York ; Basel : Marcel Dekker, 1991. — X+449 pp.
14. *Красносельский, М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. — М. : ГИФМЛ, 1958. — 271 с.
15. *Bruj, I.* Classes of functions and matrix means of orthogonal series / I. Bruj, J. Müller // Наука. Образование. Технологии-2010 : материала III Междунар. науч.-практ. конф., 21—22 окт. 2010 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. — Барановичи : РИО БарГУ, 2010. — С. 230—232 (Part 1), 232—234 (Part 2).
16. *Бруй, И. Н.* Средние тригонометрических рядов и пространства периодических функций (стендовый доклад) / И. Н. Бруй // Содружество наук. Барановичи-2016 : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей, г. Барановичи, 19—20 мая 2016 г. : в 3 ч. / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2016. — Ч. 2. — С. 6—20.
17. *Бруй, И. Н.* Средние ортогональных рядов и пространства функций (стендовый доклад) / И. Н. Бруй // Содружество наук. Барановичи-2017 : материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. молодых исследователей, г. Барановичи, 18 мая 2017 г. : в 3 ч. / редкол.: В. В. Климук (гл. ред.) [и др.]. — Барановичи : БарГУ, 2017. — Ч. 2. — С. 144—157.
18. *Бруй, И. Н.* Ряды Уолша—Пэли и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2014. — № 2 (173). — С. 11—19.
19. *Бруй, И. Н.* Мультипликативные ряды и пространства Рисса / И. Н. Бруй // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.) [и др.]. — Барановичи : РИО БарГУ, 2014. — С. 7—16.
20. *Бруй, І. М.* Метады сумавання артаганальных па плошчы шэрагаў і класы галаморфных функцый / І. М. Бруй // Весці Беларус. дзярж. пед. ун-та. Серыя 3. — 2004. — № 1 (39). — С. 14—17.
21. *Bruj, I.* Matrix Mean Series in Terms of Boundary Orthogonal Systems and Functions in the Classes H^∞ and E^p / I. Bruj, G. Schmieder // Journal of Approximation Theory. — 2002. — Vol. 118, № 2. — P. 246—256.
22. *Бруй, И. Н.* Методы суммирования ортогональных по контуру рядов и классы В. И. Смирнова $E^p(G)$, $p\in(1,\infty)$, и $H^\infty(G)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Серыя 2. — 2004. — № 1 (25). — С. 16—29.
23. *Бруй, И. Н.* Матричные средние рядов Фабера и классы В. И. Смирнова $E^p(G)$, $p\in(1,\infty)$ / И. Н. Бруй // Весн. Гродз. дзярж. ун-та ім. Я. Купалы. Серыя 2. — 2002. — № 1 (9). — С. 38—48.