

**Заключение.** Принцип работы прибора основан на преобразовании инфракрасного излучения, которое наша планета отдаёт в космос. Сейчас существует два типа генераторов для данного вида излучения. Первый представляет собой аналог солнечного коллектора, а другой — аналог фотоэлектрической панели. При работе устройство за счёт излучения инфракрасных волн вырабатывает электроэнергию, при этом, не поглощая видимый свет. За счёт разницы температур в материалах образуется электрический ток. Мощность может достигать 1,4 кВт на одном квадратном метре, что в пять раз больше, чем современные солнечные панели. Генераторы для преобразования инфракрасного излучения Земли могут стать научным прорывом в энергетике страны.

#### Список цитируемых источников

1. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. — М. : Наука, 1998. — Т. 2.
2. О́ррир, Дж. Популярная физика / Дж. О́ррир. — М. : Мир, 1969.
3. Калаши́ников, И. П. Основы физики / И. П. Калаши́ников, М. А. Смондырев. — Б. м. : [б. и.].— Т. 1.
4. Изобретатель. — 2014. — № 9. — С. 22—23.

Материал поступил в редакцию 25.02.2015 г.

УДК 519.1

А. В. Сурыпина, М. В. Пивоваревич, Ю. П. Нерода

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В ЭКОНОМИКЕ

**Введение.** В последнее время теория графов привлекает всё более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Наряду с традиционными применениями её в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науку, считавшиеся раньше далёкими от неё — экономику, социологию, лингвистику и др. [1]. В данной статье приведены примеры решения задач экономического содержания с помощью графов. В силу доступности, наглядности и полезности этого материала, возможно его рассмотрение на факультативных и внеурочных занятиях со студентами экономического профиля.

При подготовке учащихся часто сталкиваешься с вопросом — на какие методы решения задач обратить больше внимания? Можно предложить, например, такие критерии: заинтересованность, решение большого круга задач данным методом, использование исторического материала и т. п. Всем этим критериям в полной мере удовлетворяет метод, основанный на применении теории графов.

Актуальность темы заключается в том, что, благодаря применению теории графов, можно решать задачи в таких разделах экономики, как эконометрика, логистика, математическое моделирование [2]. С помощью этой теории можно решить на доступном уровне ряд достаточно сложных задач.

**Основная часть.** Графы есть способ «визуализации» связей между определёнными объектами. Для решения типовых задач мы используем определённые правила, описывающие последовательность действий — алгоритмы. Для некоторых экстремальных задач в теории графов известны эффективные алгоритмы решения. К таким задачам относятся, в частности, рассматриваемые ниже задачи о минимальном остовном дереве, о минимальном пути между вершинами и др.

Приведём несколько примеров решения задач экономического содержания с помощью алгоритмов теории графов.

**Пример 1. Практическое применение жадного алгоритма.** На территории некоего города N размещены заводы, которые поставляют продукцию в магазины этого города. В результате разработки были определены возможные трассы для прокладки коммуникаций и оценена стоимость их создания для каждой трассы. Стоимость прокладки коммуникаций для трассы между заводом № 1 и магазином № 1 составляет 15 у.е., между заводом № 1 и заводом № 3 — 85 у.е., между заводом № 1 и хлебозаводом — 20 у.е. Между магазином № 1 и заводом № 2 составит 25 у.е., между магазином № 1 и обувной фабрикой — 65 у.е. Стоимость прокладки коммуникаций для трассы, соединяющей хлебозавод и магазин № 2 — 5 у.е., между хлебозаводом и кафе — 50 у.е., между заводом № 2 и кафе — 20 у.е., между магазином № 2 и продуктовым магазином — 20 у.е., между продуктовым магазином и обувной фабрикой — 25 у.е., между продуктовым магазином и кафе — 35 у.е., между обувной фабрикой и магазином № 3 — 15 у.е., между обувной фабрикой и аптекой — 40 у.е., между кафе и аптекой — 10 у.е., между магазином № 3 и торговым центром — 20 у.е., между аптекой и заводом № 3 составит 30 у.е., между аптекой и торговым центром — 45 у.е., между заводом № 3 и торговым центром — 25 у.е. Необходимо, чтобы коммуникации связали все объекты, затраты на прокладку данных коммуникаций должны быть минимальны.

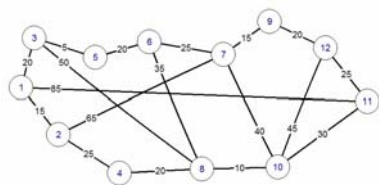


Рисунок 1 — Графическая интерпретация задачи об оптимальной структуре сети

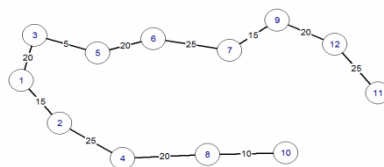


Рисунок 2 — Решение задачи о оптимальной структуре сети

**Решение:** Для удобства записи вводятся следующие обозначения:  $V_1$  — завод № 1,  $V_2$  — магазин № 1,  $V_3$  — хлебозавод,  $V_4$  — завод № 2,  $V_5$  — магазин № 2,  $V_6$  — продуктовый магазин,  $V_7$  — обувная фабрика,  $V_8$  — кафе,  $V_9$  — магазин № 3,  $V_{10}$  — аптека,  $V_{11}$  — завод № 3,  $V_{12}$  — торговый центр.

Если создать графическую интерпретацию данной модели, то видно, что получился граф с 12 вершинами и 18 рёбрами.

Из вышесказанного следует, что данную экономическую задачу можно решить с помощью теории графов. Требуется найти дерево покрытия минимального веса. Задача решается с помощью разновидности «жадного» алгоритма, алгоритма Краскала.

Сопоставим каждому пункту сети вершину графа  $G$ . А каждому ребру этого графа сопоставим число, равное стоимости строительства соответствующей коммуникации (рисунок 1).

Примером жадного алгоритма служит алгоритм Краскала [3].

Согласно алгоритму Краскала, выбирается ребро минимального веса. В данном случае это будет ребро  $e_1 = \{3,5\}$ , получаем граф  $T_1$ .

Строится граф  $T_2 = T_1 + e_2$ , где  $e_2$  — ребро, имеющее минимальный вес среди рёбер, не входящих в  $T_1$  и не составляющий циклов с рёбрами  $T_1$ ,  $e_2 = \{8,10\}$ .

$T_3 = T_2 + e_3$ , где  $e_3 = \{7,9\}$ .  $T_4 = T_3 + e_4$ , где  $e_4 = \{1,2\}$ .  $T_5 = T_4 + e_5$ , где  $e_5 = \{1,3\}$ .  $T_6 = T_5 + e_6$ , где  $e_6 = \{5,6\}$ .  $T_7 = T_6 + e_7$ , где  $e_7 = \{4,8\}$ .  $T_8 = T_7 + e_8$ , где  $e_8 = \{9,12\}$ .  $T_9 = T_8 + e_9$ , где  $e_9 = \{2,4\}$ .  $T_{10} = T_9 + e_{10}$ , где  $e_{10} = \{6,7\}$ .  $T_{11} = T_{10} + e_{11}$ , где  $e_{11} = \{11,12\}$ .

Найдено минимальное дерево покрытия взвешенного графа, следовательно, найдена и оптимальная структура сети, где общая стоимость, затраченная на прокладку коммуникаций, составит:  $5+10+15+15+20+20+20+20+25+25+25=200$  и это минимальная сумма затрат из всех возможных. При прокладке коммуникационной сети, соединяющей все данные пункты, затрачивается 200 у.е. (рисунок 2).

**Пример 2. Применение алгоритма Дейкстры.** Фирме, занимающейся перевозкой скоропортящихся товаров, необходимо доставить товар из  $A$  в  $B$ , причём маршрутов, по которым можно произвести доставку, несколько. Расстояние между  $A$  и городом 2 составляет 27 км, между  $A$  и городом 3 — 20 км, между  $A$  и городом 11 — 85 км. Между городом 2 и городом 4 — 25 км, между городом 2 и городом 7 — 65 км. Между городом 3 и городом 5 составляет 5 км, между городом 3 и городом 8 — 50 км. Между городом 4 и городом 8 — 20 км. Между городом 5 и городом 6 — 20 км. Между городом 6 и городом 7 — 25 км, между городом 6 и городом 8 — 35 км. Между городом 7 и городом 9 — 15 км, между городом 7 и городом 10 — 40 км. Между городом 9 и городом  $B$  — 20 км. Между городом 10 и городом 11 — 30 км, между городом 10 и городом  $B$  — 45 км. Между городом 11 и городом  $B$  — 25 км. Требуется найти кратчайший путь из  $A$  в  $B$ .

**Решение:** Строится граф  $G$ , в котором город  $A$  обозначается цифрой 1,  $B$  — 12. Остальные пункты маршрута обозначаются цифрами 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Каждому ребру графа сопоставляется число, которое будет равняться расстоянию между пунктами. Требуется найти минимальный маршрут. Алгоритм Дейкстры находит кратчайший путь между двумя вершинами в графе [3]. Следовательно, можно воспользоваться им при решении данной экономической задачи.

С помощью алгоритма Дейкстры находится единственный минимальный маршрут, соединяющий вершины 1 и 12 графа  $G$  (рисунок 3).

Пусть вершина 1 — начальная вершина. Для неё назначается постоянный ярлык  $L(k) = 0$ . Конечной вершиной будет считаться вершина 12. Рассматриваются вершины, смежные с вершиной 1, и назначим им временные ярлыки:  $L(2) = 27$ ,  $L(3) = 20$ ,  $L(11) = 85$ .

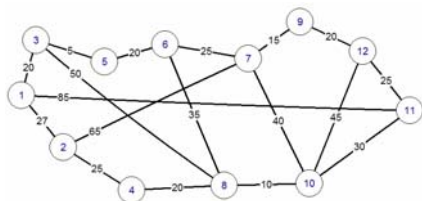


Рисунок 3 — Графическая интерпретация задачи о нахождении минимального маршрута доставки

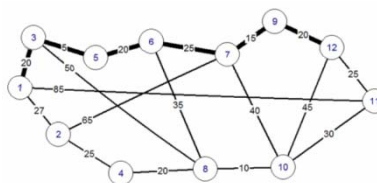


Рисунок 4 — Решение задачи о нахождении минимального маршрута доставки

Нужно выбирать вершину с самым маленьким ярлыком — это вершина 3, и её ярлык  $L(3) = 20$  становится постоянным. Повторяя этот процесс для вершины 3, вершинам присваиваются временные ярлыки:  $L(5) = 5$ ,  $L(8) = 50$ .

Среди всех временных ярлыков минимальный будет у  $L(5) = 5$ . Этот ярлык становится постоянным. С вершиной 5 смежна только вершина 6.  $L(6) = 20$ . Повторяя этот процесс для вершины 6, вершинам присваиваются временные ярлыки:  $L(7) = 25$ ,  $L(8) = 35$ .

Среди всех временных ярлыков минимальный будет у  $L(7) = 25$ . Этот ярлык становится постоянным.

Повторяя процесс, рассматриваются вершины, смежные с вершиной 7. Это 2, 9 и 10. Для них временные ярлыки будут:  $L(2) = 65$ ,  $L(9) = 15$ ,  $L(10) = 40$ . Находится наименьший временный ярлык. Он будет у:  $L(9) = 20$ . С вершиной 9 смежна только вершина 12.  $L(12) = 20$ .

Теперь, когда дерево сформировано, мы можем определить самый короткий путь дерева, соединяющий вершины 1 и 12. Он проходит через вершины 3, 5, 6, 7 и 9.

Длина самого короткого пути:  $20 + 5 + 20 + 25 + 15 + 20 = 105$  (км) (рисунок 4).

**Пример 3. Задача о нефтепроводе максимальной пропускной способности.** На практике часто возникают задачи определения максимального количества нефти, которое может быть доставлено по трубопроводу за какое-то время. Аналогичными являются задачи определения максимальной пропускной способности системы автомагистралей или энергосети. Формально эти проблемы сводятся к задаче построения максимального потока в сети. Мы же конкретней остановимся на задаче определения максимальной пропускной способности нефтепровода [4].

Найти максимальный поток в транспортной сети, используя алгоритм Форда-Фалкерсона (алгоритм расстановки пометок). Источник — вершина 1, сток — вершина 8 (рисунок 5).

*Решение:* С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдём наибольший поток из 1 в 8.

Шаг 1. Выбираем произвольный поток, например, 1-3-6-7-8. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, т. е. 6. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 6, насыщенную дугу 3-6 вычёркиваем.

Шаг 2. Выбираем произвольный поток, например, 1-4-5-8. Его пропускная способность равна 24. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 24, насыщенную дугу 4-5 вычёркиваем.

Шаг 3. Выбираем произвольный поток, например, 1-5-8. Его пропускная способность равна 57. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 57, насыщенную дугу 1-5 вычёркиваем.

Шаг 4. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-8. Его пропускная способность равна 16. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 16, насыщенную дугу 2-8 вычёркиваем.

Шаг 5. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-5-8. Его пропускная способность равна 13. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 13, насыщенную дугу 5-8 вычёркиваем.

Шаг 6. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-5-7-8. Его пропускная способность равна 3. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 3, насыщенную дугу 1-2 вычёркиваем.

Шаг 7. Выбираем произвольный поток, например, 1-4-6-7-8. Его пропускная способность равна 1. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 1, насыщенную дугу 6-7 вычёркиваем.

Шаг 8. Выбираем произвольный поток, например, 1-4-6-5-7-8. Его пропускная способность равна 8. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 8, насыщенную дугу 4-6 вычёркиваем.

Больше путей нет. Суммарный поток  $6 + 24 + 57 + 16 + 13 + 3 + 1 + 8 = 128$ .

**Заключение.** Теория графов имеет широкие практические приложения. Многие проблемы, возникающие в различных областях знания могут быть сформулированы как задачи теории графов. В таких разделах экономики, как эконометрика, логистика, математическое моделирование широко используют графы. В логистике широко используется теория графов для описания потоков, задания маршрутов. В работе показано, как схему дорог удобно представить в виде ориентированного графа, в котором известными нам методами можно выбрать кратчайший путь. В современных условиях, прокладывая маршрут, особое внимание необходимо обратить на пропускную способность магистралей. И в этом случае экономически выгодное решение можно получить, интерпретируя маршруты в графы.

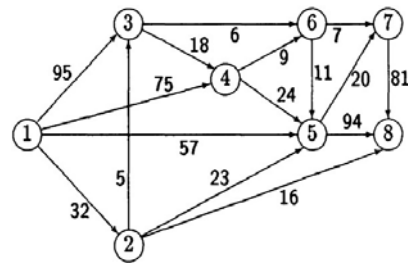


Рисунок 5 — Графическая интерпретация задачи о нефтепроводе максимальной пропускной способности

#### Список цитируемых источников

1. Березина, Л. Ю. Графы и их применение / Л. Ю. Березина // М. : Просвещение. 1979. — 143 с.
2. Студенческий научный форум [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.scienceforum.ru/2014/480/3980/>. — Дата доступа: 22.02.2015.

3. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. В. П. Козырева ; под ред. Г. П. Гаврилова. — Изд. 2-е. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 296 с.

4. Инженерный вестник Дона [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1666/>. — Дата доступа: 22.02.2015.

Материал поступил в редакцию 25.02.2015 г.

УДК 531-004.942

А.В. Цэбрук, Х.О. Мерэтдурдыеў, С. I. Русан.

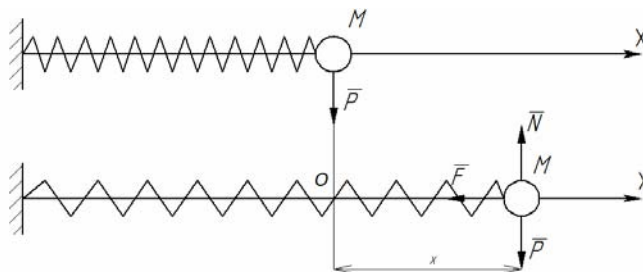
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

## ПРАМАЛІНЕЙНЫЯ ВАГАННІ ПУНКТА Ў АНІМАЦЫЯХ

**Уводзіны.** Адметная ўласцівасць вагальных рухаў заключаецца ў тым, што яны паўтараюцца праз пэўны прамежак часу. Такія рухі шырока распаўсюджаны ў аб'ектах тэхнікі. У працэсе ваганняў званняў машын, механізмаў, інжынерных збудаванняў узнікаюць дынамічныя напружанні, якія пры пэўных умовах могуць прывесці да разбурэння канструкцыі, альбо да парушэння іх функцыянальных уласцівасцей. Каб пазбегнуць такіх умоў, на стадыі праектавання выконваюцца дынамічныя разлікі, заснаваныя на тэорыі ваганняў. Гэта тэорыя выкарыстоўваецца таксама ў разліках вібрамашын, у якіх вагальныя рухі забяспечваюць рабочы працэс.

**Мадэль гарманічных ваганняў.** У гэтым даследаванні разглядаюцца прасцейшыя гэтак званыя *гарманічныя ваганні* пункта, пры якіх яго рух адбываецца па законах:  $x = a \cdot \sin(kt + \alpha)$  ці  $x = a \cdot \cos(kt + \alpha)$ . Асаблівае месца гарманічных ваганняў у механіцы вызначаецца не толькі шырокім распаўсюджаннем іх у тэхніцы і прыродзе, але і той абставінай, што іншыя, больш складаныя вагальныя рухі могуць быць прадстаўлены ў выглядзе сукупнасці гарманічных ваганняў — раскладзены на простыя “гармонікі” (рысунак 1).

На абсалютна гладкі стрыжань насаджана спружына, да свабоднага канца якой прымацаваны шарык з адтулінай. Разам яны ўтвараюць *вагальную сістэму*. Спружынай тут мадэліруецца пругкі элемент, шарыкам — матэрыяльны пункт. У якасці пругкага элемента ў тэхніцы можа разглядацца эластычны стрыжань, рысора і інш. Вагальныя рухі пункта ў большасці выпадкаў выклікаюцца ўнутранай *аднаўляльнай* сілай  $F = cx$  прыкладзенай да шарыка з боку спружыны. У прыведзенай формуле  $c$  — каэфіцыент жорсткасці спружыны, які характарызуе яе пругкія уласцівасці. На пункт могуць дзейнічаць і знешнія сілы: сіла супраціўлення асяроддзя і перыядычная ўзбуджальная сіла. У залежнасці ад спалучэння гэтых сіл будзем адрозніваць наступныя віды гарманічных ваганняў: *свабодныя ваганні*, што ўзнікаюць толькі пад дзеяннем аднаўляльнай сілы; *згасальныя ваганні* — ў асяроддзі з супраціўленнем; *вымушаныя ваганні* — пад дзеяннем узбуджальнай гарманічнай сілы (без уліку і з улікам супраціўлення асяроддзя). Вывучэнне гарманічных ваганняў пункта прадугледжана на вучэбным праграмамі тэхнічных ВНУ. Іх матэматычнае апісанне выкладзена ў падручніках па тэарэтычнай механіцы (напрыклад, [1, с. 148—174]). Неабходныя для даследавання ваганняў кінематычныя ўраўненні атрымліваюцца ў выніку рашэння другой асноўнай задачы дынамікі пункта. Ніжэй яны прыводзяцца ў канчатковым выглядзе. Незалежнай пераменнай усюды з’яўляецца час руху  $t$ .



Рысунак 1—Мадэль гарманічных ваганняў матэрыяльнага пункта M

**Ураўненне свабодных ваганняў.** Пачатак адліку  $O$  па восі  $Ox$  сумяшчам са становішчам раўнавагі пункта  $M$  (рысунак 1). *Зыходныя дадзеныя:*  $m$  — маса пункта;  $c$  — жорсткасць пругкага элемента (спружыны);  $x_0$  — пачатковая каардыната;  $v_0$  — пачатковая скорасць. Вылічваем цыклічную частату  $k$ , амплітуду ваганняў  $a$  і пачатковую фазу  $\alpha$ :  $k = \sqrt{c/m}$ ;  $\alpha = \sqrt{x_0^2 + (v_0/k)^2}$ ;  $\alpha = \text{arctg}(kx_0/v_0)$ .