

Учреждение образования
«Барановичский государственный университет»

Вестник БарГУ

Ежеквартальный научно-практический журнал

Издаётся с марта 2013 г.

Выпуск 5, июнь, 2017.

Серия «Технические науки»

Учредитель: учреждение образования «Барановичский государственный университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор журнала Кочурко Василий Иванович, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, академик Белорусской инженерной академии, академик Международной академии технического образования, академик Международной академии наук педагогического образования, академик Академии экономических наук Украины, Заслуженный работник образования Республики Беларусь, ректор учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Заместитель главного редактора журнала Никишова Алла Васильевна, кандидат филологических наук, доцент, проректор по научной работе учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ

Главный редактор серии

Алифанов Александр Викторович, лауреат Государственной премии Республики Беларусь в области науки и техники, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры оборудования и автоматизации производства учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Ответственный секретарь серии

Горбач Юлия Евгеньевна, старший преподаватель кафедры экономики и организации производства инженерного факультета учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Редактор текстов на английском языке

Пинюта Ирина Вячеславовна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры профессиональной иноязычной подготовки учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Гавриленя Андрей Константинович (*ответственный за направление «Машиностроение и машиноведение»*), кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой общенаучных дисциплин инженерного факультета учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Дубень Игорь Викторович (*ответственный за направление «Процессы и машины агроинженерных систем»*), кандидат технических наук, доцент кафедры механизации и энергообеспечения производства инженерного факультета, декан факультета довузовской подготовки учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Анискович Геннадий Иосифович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии и организации технического сервиса учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет» (Минск, Республика Беларусь).

Белый Алексей Владимирович, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Государственного научного учреждения «Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси» (Минск, Республика Беларусь).

Гордиенко Анатолий Илларионович, академик Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, начальник Центра индукционных технологий Государственного научного учреждения «Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси» (Минск, Республика Беларусь).

Девоино Олег Георгиевич, доктор технических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской инновационной лабораторией плазменных и лазерных технологий филиала Белорусского национального технического университета «Научно-исследовательская часть» (Минск, Республика Беларусь).

Добышев Анатолий Семёнович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры механизации животноводства и электрификации сельскохозяйственного производства учреждения образования «Белорусская государ-

ственная орденов Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени сельскохозяйственная академия» (Горки, Республика Беларусь).

Дремук Владимир Алексеевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры механизации и энергообеспечения производства учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Ивашко Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технической эксплуатации автомобилей Белорусского национального технического университета (Минск, Республика Беларусь).

Калугин Юрий Константинович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры машиноведения и технической эксплуатации автомобилей учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» (Гродно, Республика Беларусь).

Карташевич Анатолий Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой тракторов и автомобилей учреждения образования «Белорусская государственная орденов Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени сельскохозяйственная академия» (Горки, Республика Беларусь).

Клочков Александр Викторович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сельскохозяйственных машин учреждения образования «Белорусская государственная орденов Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени сельскохозяйственная академия» (Горки, Республика Беларусь).

Клубович Владимир Владимирович, доктор технических наук, академик Национальной академии наук Беларуси, профессор, главный научный сотрудник Государственного научного учреждения «Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси» (Минск, Республика Беларусь).

Ласковнѳ Александр Петрович, доктор технических наук, академик Национальной академии наук Беларуси, академик-секретарь отделения физико-технических наук Национальной академии наук Беларуси (Минск, Республика Беларусь).

Нерода Михаил Владимирович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой технологии машиностроения учреждения образования «Барановичский государственный университет» (Барановичи, Республика Беларусь).

Спиридонов Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии машиностроения Белорусского национального технического университета (Минск, Республика Беларусь).

Томило Вячеслав Анатольевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры деталей машин Белорусского национального технического университета (Минск, Республика Беларусь).

Шелег Валерий Константинович, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии машиностроения Белорусского национального технического университета (Минск, Республика Беларусь).

Адрес редакции:

ул. Войкова, 21, 225404 г. Барановичи.

Телефон: +375 (163) 45 46 28.

E-mail: vestnik@barsu.by.

Подписные индексы: 00993 — для индивидуальных подписчиков; 009932 — для организаций.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации № 1533 от 30.07.2012, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

В соответствии с приказом Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 21 января 2015 г. № 16 научно-практический журнал «Вестник БарГУ» серия «Технические науки» включѳн в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по техническим наукам (машиностроение и машиноведение; процессы и машины агроинженерных систем).

Научно-практический журнал «Вестник БарГУ» включѳн в РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), лицензионный договор № 06-1/2016.

Издатель: учреждение образования «Барановичский государственный университет».

Выходит на русском, белорусском и английском языках.

Журнал распространяется на территории Республики Беларусь.

Заведующий редакционно-издательским отделом С. А. Березнюк

Технический редактор А. Ю. Сидоренко

Компьютерная вѳстка С. М. Глушак

Корректор С. А. Березнюк

Подписано в печать 12.06.2017. Формат 60 × 84 ¹/₈. Бумага ксероксная. Печать цифровая. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 12,50. Уч.-изд. л. 7,60. Тираж 75 экз. Заказ 1325.

Цена свободная.

Полиграфическое исполнение: открытое акционерное общество «Красная звезда». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя и распространителя печатных изданий № 2/7 от 28.10.2013.

Юридический адрес: пер. 1-й Загородный, 3, 220073 Минск.

Почтовый адрес: ул. Советская, 80, 225409 Барановичи.

СОДЕРЖАНИЕ

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Акулович Л. М., Сергеев Л. Е., Дечко М. М., Сенчуров Е. В. Факторный анализ процесса магнитно-абразивной обработки по критериям качества обработанной поверхности | 10 |
| Алифанов А. В., Богданович И. А., Малеронок В. В. Исследование влияния магнитно-импульсной обработки поверхностного слоя стальных образцов на их физико-механические свойства | 18 |
| Алифанов А. В., Милюкова А. М., Бурносов Н. В., Толкачева О. А. Повышение прочностных характеристик порошковой титановой бронзы | 25 |
| Голубев В. С., Гуринович В. И., Романчук И. А. Лазерная поверхностная обработка материалов и пути повышения ее эффективности | 31 |
| Горчанин А. И., Милюкова А. М. Исследование ножей, упроченных магнитно-импульсной обработкой, для резки сахарной свеклы | 37 |
| Грищенко Л. С., Иванова Н. П., Матыс В. Г., Ашуйко В. А. Ингибиторная защита горячеоцинкованной стали в хлоридсодержащих средах | 43 |
| Милюкова А. М., Горчанин А. И., Бурносов Н. В., Михлюк А. И. Определение режима магнитно-импульсного упрочнения дисков хлопкоочистительных машин | 49 |
| Попок Н. Н., Кузьмич Е. В., Черневич М. В. Сверление комбинированного металлостеклополимерного материала | 56 |
| Попок Н. Н., Кунцевич И. П., Хмельницкий Р. С., Анисимов В. С., Гвоздь Г. И. Изменение передних и задних углов лезвия фрезы при обработке сферических поверхностей детали | 71 |
| Русан С. И. Нетрадиционный метод силового анализа статически неопределимых систем с жестким объектом | 78 |
| Сиваченко Л. А., Сотник Л. Л. Анализ работы подшипниковых узлов эксцентрикового вала вибро-валкового измельчителя | 87 |

ПРОЦЕССЫ И МАШИНЫ АГРОИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ

| | |
|---|----|
| Клочков А. В., Ковалевский В. Ф. Результаты испытаний пружинно-пальцевых активаторов клавишного соломотряса зерноуборочного комбайна | 93 |
|---|----|

УДК 539.2

С. I. Русан

Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь,
вул. Войкава, 21, 225404 Баранавічы, Рэспубліка Беларусь, +375 (163) 64 06 63, rusan33@mail.ru

НЕТРАДЫЦЫЙНЫ МЕТАД СІЛОВОГА АНАЛІЗУ СТАТЫЧНА НЕАЗНАЧАЛЬНЫХ СІСТЭМ З ЖОРСТКІМ АБ'ЕКТАМ

Объектом исследования является статически неопределимая механическая система, состоящая из одного твердого тела на жесткой опоре и совокупности упругих связей. На нее действует неуравновешенная плоская система внешних сил. Цель исследования — усовершенствование методики определения внутренних сил в связях. Типовая методика исследования, изучаемая в курсе сопротивления материалов, приводит к решению системы алгебраических уравнений. Чтобы упростить методику, здесь вводятся понятия внутренней нагруженности связи и внешней нагруженности механической системы, сформулирована и доказана теорема о равенстве нагруженностей. Теорема позволила построить алгоритм силового анализа без составления и решения системы уравнений. Алгоритм проиллюстрирован численным примером анализа. Полученные результаты могут использоваться как в учебном процессе, так и в инженерных расчетах.

Ключевые слова: статически неопределимая система; внутренняя сила; деформация стержня; уравнение равновесия.

Рис. 5. Библиогр.: 2 назв.

S. I. Rusan

Baranovich State University, Ministry of Education of the Republic of Belarus, 21 Voykova Str., 225404
Baranovich, Republic of Belarus, +375 (163) 64 06 63, rusan33@mail.ru

UNCONVENTIONAL METHOD OF POWER ANALYSIS OF STATICALLY INDETERMINATED SYSTEMS WITH A HARD OBJECT

The object of the research is a statically indeterminate mechanical system which consists of one rigid body on a rigid support and a set of elastic links. The goal of the study is the improvement of the methodology of determination of the internal forces in the links. The standard method of solving the problem leads to the solution of the system of algebraic equations. To simplify the task we have formulated and proved the theorem that expresses the ratio of impacts and stiffness. It made possible to construct an algorithm of power analysis without making and solving the system of equations. There is a numerical example of the analysis. The obtained results can be used both in the educational process and engineering calculations.

Key words: statically indeterminate system; internal forces; deformation of the rod; equation of equilibrium.

Fig. 5. Ref.: 2 titles.

Уводзіны. *Агульныя заўвагі. Змест задачы.* Пытанні трываласці механічных сістэм у эпоху інтэнсіўнага развіцця тэхнікі застаюцца прыцягальнымі. Удасканалююцца як аб'екты тэхнікі, так і метады іх разлікаў на трываласць. Узнікае неабходнасць карэкціроўкі адпаведных дысцыплін, вывучаемых у тэхнічных установах вышэйшай адукацыі.

Мадэль механічнай сістэмы ў нашым даследаванні складаецца з абсалютна цвёрдага цела і пругкіх элементаў і таму адносіцца да тыпу канструкцый, вывучаемых у курсах механікі матэрыялаў і тэарэтычнай механікі [1; 2]. Жорсткім аб'ектам A (рысунак 1) мадэлюецца плоскае цела адвольнай формы, дэфармацыямі якога можна ігнараваць у параўнанні з дэфармацыямі іншых частак механічнай сістэмы — стержняў E і спружын K, L . На аб'ект A накладваюцца двухвалентныя жорсткія сувязі B ці D . Кожная з іх дапускае

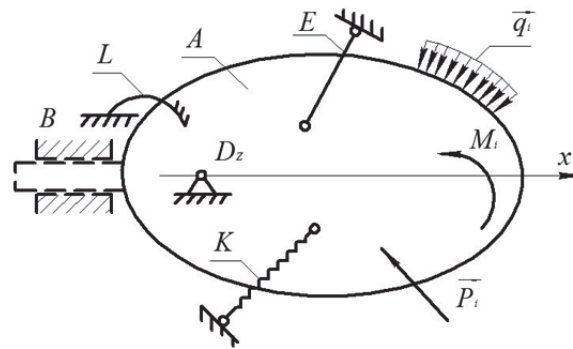


Рисунок 1. — Мадэль зададзенай механічнай сістэмы тыпаў B і D

для аб'екта адну ступень свабоды: пры налажэнні слізгальнай замацоўкі B ён можа перамяшчацца толькі паступальна ўздоўж восі Bx , а нерухома шарнір D дапускае толькі паварот вакол восі Dz , перпендыкулярнай да плоскасці рысунка. Па відзе жорсткіх сувязей прысвоім і назвы механічным сістэмам: сістэма тыпу B і сістэма тыпу D . Раўнавага рухомага аб'екта A пад дзеяннем знешніх сіл P_i, M_i, q_i магчыма, дзякуючы ўключэнню ў работу пругкіх сувязей E, K, L . Ступень статычнай незначальнасці сістэмы ўстанаўліваецца паводле формулы $z = s - 1$, дзе s — агульная колькасць пругкіх сувязей.

Сувязі-стрыжні E зазнаюць восевую дэфармацыю паводле закона Гука. Дэфармацыя цыліндрычнай спружыны K прапарцыянальна рэактыўнай сіле N_{K_i} , а спружыны тыпу L — рэактыўнаму моманту M_{L_i} (апошняя рэагуе толькі на паварот аб'екта A). Такім чынам, абсалютныя дэфармацыі $\Delta l_{E_i}, \Delta l_{K_i}, \Delta \varphi_{L_i}$ сувязей тыпу E, K, L суадносяцца з іх рэакцыямі $N_{E_i}, N_{K_i}, M_{L_i}$ паводле формул

$$\Delta l_{E_i} = N_{E_i} l_i / E_i F_i; \quad \Delta l_{K_i} = N_{K_i} c_{K_i}; \quad \Delta \varphi_{L_i} = M_{L_i} c_{\varphi_i}. \quad (1)$$

Тут ніжнім індэксам i абазначаны нумары сувязей; індэксамі K, L пазначаны велічыні, што належаць да адпаведных тыпаў спружын. Даўжыні недэфармаваных стрыжняў роўны l_i, E_i, F_i — модуль Юнга і плошча сячэння стрыжня; c_{K_i}, c_{φ_i} — жорсткасці цыліндрычнай і спіральнай спружын. Сувязі тыпу L жорстка змацаваны з аб'ектам A і з нерухомай асновай, што знаходзіцца за межамі аб'екта. Астатнія сувязі далучаюцца да цела A і жорсткай асновы шарнірна і зазнаюць дэфармацыі расцяжэння-сціскання. Нагрузка на аб'ект P_i, M_i, q_i уяўляе неўраўнаважаную плоскую сістэму сіл.

Мэта даследавання апісанай механічнай сістэмы — вызначэнне ўнутраных сіл (рэакцый) у элементах тыпу E, K, L пры іх вядомых механічных, геаметрычных характарыстыках і зададзеным знешнім сілавым уздзеянні на цела A .

Асноўная частка. Характарыстыка жорсткасцей. Жорсткасць пругкага элемента механічнай сістэмы залежыць ад матэрыялу, з якога ён выраблены, ад яго геаметрычных параметраў і размяшчэння ў механічнай сістэме. Таму адзін і той жа пругкі элемент мае некалькі відаў характарыстык жорсткасці (табліца 1). Так, для апісання супраціўлення сувязі тыпу E (стрыжняў) выкарыстоўваюцца жорсткасці $c_{E_i}, c'_{E_i}, c''_{E_i}$. Першая з іх $c_{E_i} = E_i F_i$ уяўляе жорсткасць сячэння; другая $c'_{E_i} = E_i F_i / l_i$ характарызуе супраціўленне ўсяго стрыжня;

назавём яе адноснай. Жорсткасць c''_{E_i} улічвае размяшчэнне стрыжня ў механічнай сістэме; яе будзем называць прыведзенай жорсткасцю. Як відаць з табліцы 1, прыведзеная жорсткасць

Т а б л і ц а 1. — Жорсткасці сувязей

| Магчымае перамяшчэнне аб'екта А | Тып прускага элемента | Віды жорсткасцей элементаў | | |
|---------------------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------|------------------------|
| | | c_i | c'_i | c''_i |
| паступальнае | E | $E_i F_i$ | $E_i F_i / l_i$ | $c'_i \cos \alpha_i$ |
| | K | — | c_{K_i} | $c_{K_i} \cos \beta_i$ |
| | L | — | — | — |
| вярчальнае | E | $E_i F_i$ | $E_i F_i / l_i$ | $c'_{E_i} h_i$ |
| | K | — | c_{K_i} | $c_{K_i} h_i$ |
| | L | — | c_{φ_i} | c_{φ_i} |

стрыжня залежыць як ад яго становішча ў механічнай сістэме, так і ад характару магчымага перамяшчэння цела A : пры паступальным перамяшчэнні жорсткасць c''_{E_i} прыводзіцца да восі Bx , а пры вярчальным — да цэнтра D (гл. рысунак 1). Жорсткасць усёй сістэмы сувязей будзем абазначаць літарай c з індэксам: пры паступальным перамяшчэнні — c_x , пры вярчальным — c_φ . Велічыні c_x , c_φ вызначаюцца па формулах

$$c_x = \sum_{i=1}^n c'_{E_i} \cos^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^m c'_{K_i} \cos^2 \beta_i; \quad c_\varphi = \sum_{i=1}^n c'_{E_i} h_i^2 + \sum_{i=1}^m c_{K_i} h_i^2 + \sum_{i=1}^p c_{\varphi_i}. \quad (2)$$

Літарамі n , m , p тут абазначана колькасць сувязей тыпу E , K , L , а вугламі α_i , β_i задаецца нахіл стрыжняў і восей цыліндрычных спружын.

Тыпавая методка рашэння задач з жорсткім аб'ектам. Як адзначалася вышэй, механічныя сістэмы з жорсткім аб'ектам разглядаюцца ў курсе «Механіка матэрыялаў» [1, с. 56—58]. У вучэбных заданнях жорсткі аб'ект уяўляе сабою стрыжань на адной нерухомай шарнірнай апоры (рысунак 2). Да яго прыкладзена знешняя сіла P . Дадаткова аб'ект замацаваны з дапамогай дзвюх пругкіх сувязей 1, 2 тыпу E . Невядомымі з'яўляюцца восевыя сілы N_1 , N_2 і рэакцыі X_0 , Y_0 . Для іх вызначэння можна скласці толькі тры статычныя ўмовы раўнавагі. Значыць, даследуемая механічная сістэма адзін раз статычна неазначальная. На першым этапе рашэння задачы асобна знаходзяцца сілы N_1 , N_2 , а затым, пры неабходнасці, вызначаюць рэакцыі X_0 , Y_0 . Каб знайсці дзве сілы N_1 , N_2 , патрэбна скласці два ўраўненні. Адным з іх прымаецца ўраўненне статыкі, якое не ўтрымлівае невядомых X_0 , Y_0 . Для атрымання другога ўраўнення разглядаюцца перамяшчэнні пунктаў M_1 , M_2 , у якіх стрыжні прымацаваны да аб'екта A , і адпаведныя ім дэфармацыі стрыжняў

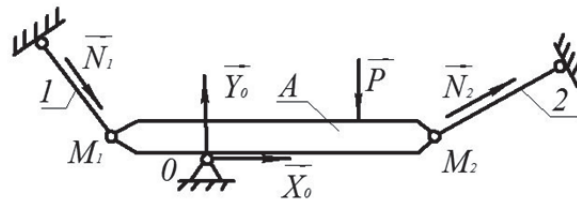


Рисунок 2. — Типовая модель механической системы

Δl_1 , Δl_2 паводле закона Гука, запісаныя вышэй у радку (1). Такім чынам, тыповая методика даследавання статычна незначальнай сістэмы заснавана на трох тыпах залежнасцей: статычнай, геаметрычнай і фізічнай. На завяршальнай стады даследавання рашаецца атрыманая сістэма алгебраічных ўраўненняў адносна невядомых восевых сіл N_1 , N_2 . Парадак гэтай сістэмы роўны двум, г. зн. колькасці стрыжняў. Пры іх павелічэнні рашэнне задачы істотна ўскладняецца, што з'яўляецца недахопам тыповай методкі. Ніжэй прапануецца іншы варыянт заключнага сінтэзу атрыманых залежнасцей, які дазваляе пазбегнуць адзначаных цяжкасцей.

Унутраная і знешняя нагружанасці. Тэарэма аб роўнасці нагружанасцей. Унутраныя сілы (рэакцыі) у элементах з індэксамі i тыпаў E , K абазначым літарамі N_{E_i} , N_{K_i} , а ўнутраны момант у элеменце тыпу L — праз M_{L_i} . Адносіны ўнутраных сіл і момантаў да іх прыведзеных жорсткасцей c_i'' будзем называць унутранымі нагружанасцямі элементаў і абазначым літарамі n_{E_i} , n_{K_i} , m_{L_i} , г. зн. $n_{E_i} = N_{E_i} / c_{E_i}''$, $n_{K_i} = N_{K_i} / c_{K_i}''$, $m_{L_i} = M_{L_i} / c_{\phi_i}$.

У выпадках, калі не патрэбна ўдакладненне тыпу элемента, яго ўнутраную нагружанасць будзем выражаць формулай $n_i = N_i / c_i''$. Значэнні c_i'' для кожнага тыпу сувязі прыведзены ў табліцы 1. Чым большая нагружанасць элемента, тым вышэй яго напружана-дэфармаваны стан. Знешнюю нагрузку на механічную сістэму абазначым праз P_Σ . Яе праекцыі на восі каардынат і моманты адносна цэнтраў B , D будзем абазначым сімваламі $\sum X_i$, $\sum Y_i$, M_B , M_D . Адносіны знешняй нагрузкі P_Σ на сістэму да яе жорсткасці c назавём знешняй нагружанасцю механічнай сістэмы і абазначым малой літарай p_Σ . Значыць, паводле азначэння, $p_\Sigma = P_\Sigma / c$. Канкрэтызуем гэту формулу для механічных сістэм тыпаў B і D : $p_{\Sigma B} = \sum X_i / c_x$, $p_{\Sigma D} = M_D / c_\phi$. Жорсткасці c_x , c_ϕ вызначаюцца па формулах (2).

Тэарэма. У плоскіх механічных сістэмах з жорсткім аднарухомым аб'ектам унутраная нагружанасць дэфармаванага элемента роўна знешняй нагружанасці механічнай сістэмы: $n_i = p_\Sigma$.

Доказ тэарэмы выканаем асобна для механічных сістэм тыпаў B і D . Каб скараціць выкладанне, на рысунках 3 і 4 захаваем толькі сувязі тыпу E .

Доказ тэарэмы для сістэмы тыпу B . Колькасць стрыжняў роўна n . На рысунку 3 паказаны адзін з іх у трох магчымых становішчах з індэксамі i (j , k) даўжынёю l_i (l_j , l_k). Арыентацыю стрыжня ў сістэме будзем задаваць вуглом α_i , які ён утварае з воссю B_x . Мяркуюцца,

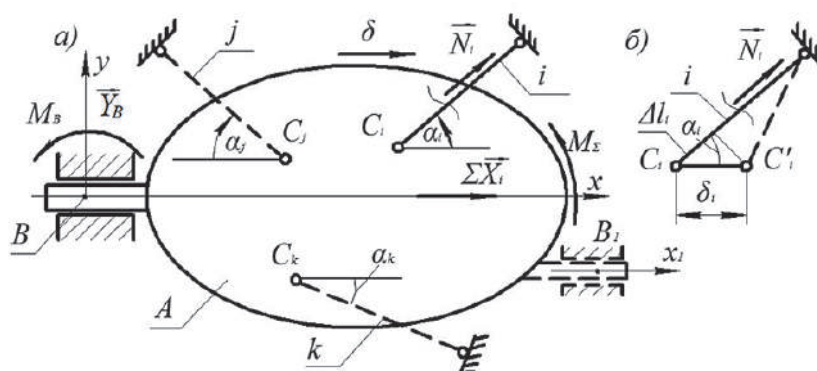


Рисунок 3. — Разліковая мадэль тыпу В

што $0^\circ \leq \alpha_i \leq 90^\circ$. Сума праекцый усіх знешніх сіл на вось B_x паказана на рысунку 3 адрэзкам $\sum X_i$, а іх момант адносна цэнтра B абазначаны літарай M_Σ . Рэактыўныя сілы жорсткай сувязі B роўныя Y_B, M_B . Перамяшчэнне жорсткага цэла A паказана стрэлкай δ . Заўважым, што паколькі аб'ект A выконвае паступальнае перамяшчэнне, то ў формулах (2) нагружанасці n_{E_i} , якія ўяўляюць перамяшчэнні шарніраў C_i, C_j, C_k , роўныя паміж сабою: $n_{E_i} = \delta_i = \delta_j = \delta_k = \delta$. На рысунку 3, б, асобна паказаны стрыжань i : суцэльнай лініяй да нагружэння сістэмы і пункцірнай — пасля перамяшчэння шарніра C_i разам з цэлам A на адлегласць $\delta_i = C_i C'_i$. Абсалютная дэфармацыя стрыжня (гл. рысунак 3, б) роўна $\Delta l_i = \delta_i \cos \alpha_i$. Адпаведную ёй унутраную сілу абазначаем літарай N_i і накіроўваем ад сячэння. Далей выкарыстоўваем апісаныя вышэй тры віды залежнасцей паводле тыповага метаду аналізу:

$$\sum_{i=1}^n N_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^k X_i = 0; \quad \Delta l_i = \delta_i \cos \alpha_i; \quad \Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i}. \quad (3)$$

З двух апошніх роўнасцей (3) знаходзім: $\delta_i \cos \alpha_i = N_i l_i / E_i F_i$; адсюль

$$N_i / c'_i \cos \alpha_i = \delta = n_{E_i}. \quad (4)$$

Для механічнай сістэмы, што ўключае n сувязей і столькі ж невядомых сіл N_i , запісваем $(n-1)$ роўнасцей (4) і далучаем першае ўраўненне (3). Атрымліваем паводле тыповай метадыкі n алгебраічных ураўненняў адносна невядомых сіл N_i . Самая працаёмкая частка даследавання — рашэнне атрыманай сістэмы ўраўненняў. Каб спрасціць рашэнне задачы, у якасці невядомых прыем замест N_i нагружанасць стрыжняў n_{E_i} . З роўнасці (4) знаходзім: $N_i = n_{E_i} c'_i \cos \alpha_i$. Тады першае ўраўненне (3) прымае выгляд

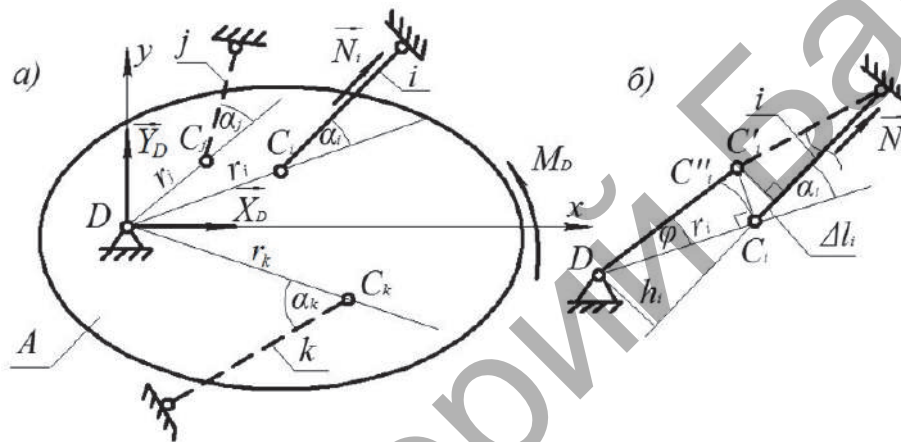
$$\sum_{i=1}^n n_{E_i} c'_i \cos^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^k X_i = 0. \quad \text{Адсюль } n_{E_i} \sum_{i=1}^n c''_i \cos \alpha_i = -\sum_{i=1}^k X_i \text{ і } n_{E_i} = -\sum_{i=1}^k X_i / \sum_{i=1}^n c''_i \cos \alpha_i. \text{ Канчаткова}$$

$n_{E_i} = P_{\Sigma B}$. Тэарэма даказана.

Доказ тэарэмы для сістэмы тыпу D. У гэтай сістэме аб'ект A пад знешнім уздзеяннем можа паварочвацца вакол шарніра D і нагружаць стрыжні (рысунак 4, а). Іх становішча

ў сістэме вызначаецца вугламі α , якія цяпер адлічваюцца ад прамых, задаваемых адрэзкамі DC_i, DC_j, DC_k . Як і раней, мяркуецца, што $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. На рысунку 4, а, паказана некалькі варыянтаў размяшчэння стрыжняў, злучаных з цэлам A ў пунктах C_i, C_j, C_k . Выкарыстоўваем метады сячэнняў; сілы N_i накіроўваем ад сячэнняў у бок знешняй замацоўкі. Прымаем абазначэнні: φ — вугал павароту аб'екта A пад дзеяннем моманта знешніх сіл M_D ; δ_i — перамяшчэнне пункта C_i ; мяркуецца, што вугал φ малы, таму дугу $C_i C_i''$ замяняем адрэзкам $C_i C_i' = \delta_i$ (гл. рысунак 4, б); h_i — плячо сілы N_i адносна цэнтра D . Запісваем статычную ўмову раўнавагі, геаметрычныя і фізічныя суадносіны паводле рысункаў 4, а, б:

$$\sum_{i=1}^n N_i h_i + M_D = 0; \quad \frac{\delta_i}{r_i} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}; \quad \Delta l_i = \delta_i \sin \alpha_i; \quad \Delta l_i = N_i l_i / E_i F_i.$$



Рысунак 4. — Разліковая мадэль тыпу D

З іх атрымліваем $\delta_i \sin \alpha_i = N_i l_i / E_i F_i$, $\operatorname{tg} \varphi \sin \alpha_i = N_i l_i / r_i E_i F_i$. У якасці невядомай велічыні прымаем пастаянную $\operatorname{tg} \varphi = N_i l_i / r_i E_i F_i \sin \alpha_i = N_i l_i / E_i F_i h_i$ ці

$$\operatorname{tg} \varphi = N_i / c_i' h_i = N_i / c_i'' \tag{5}$$

Тады $N_i = \operatorname{tg} \varphi \cdot c_i'$, а ўмова раўнавагі набывае выгляд: $\sum_{i=1}^n \operatorname{tg} \varphi \cdot c_i' h_i + M_D = 0$; $\sum_{i=1}^n \operatorname{tg} \varphi \cdot c_i'' h_i + M_D = 0$;

інакш $\operatorname{tg} \varphi \sum_{i=1}^n \bar{c}_i = -M_D$, дзе $\bar{c}_i = c_i'' h_i$.

Адгэтуль атрымліваем знешнюю нагружанасць $p_{\Sigma D}$ сістэмы D :

$$\operatorname{tg} \varphi = -M_D / \sum_{i=1}^n \bar{c}_i = p_{\Sigma D}.$$

Але паводле (5) $\operatorname{tg} \varphi = N_i / c_i' h_i$, г. зн. уяўляе ўнутраную нагружанасць n_{E_i} стрыжня i .

Такім чынам,

$$n_{E_i} = p_{\Sigma D} \tag{6}$$

Методыка вызначэння нормальных сіл на падставе тэарэмы нагружанасцей.
Разгледзім методыку сілавога аналізу тыпу D з пругкімі стрыжнямі. Для іх тэарэма выражаецца роўнасцю (6), з якой знаходзім:

$$N_i = c_i'' p_{\Sigma D}. \quad (7)$$

Структурай формулы (7) вызначаецца наступная методыка вылічэння сіл N_i :

- знаходзім прыведзеныя да цэнтра D жорсткасці c_i'' усіх стрыжняў;
- знаходзім параметры жорсткасці \bar{c}_i і прыведзеную да цэнтра D жорсткасць усёй сістэмы c_ϕ ;
- вызначаем уздзеянне знешніх сіл $P_{\Sigma D} = M_D$ і знешнюю нагружанасць сістэмы $p_{\Sigma D} = M_D / c_\phi$;
- па формуле (7) знаходзім нормальныя сілы N_i ;
- устанаўліваем знакі сіл N_i .

Правілы ўстанаўлення знакаў для сістэм B і D аднолькавыя. Калі даўжыня стрыжня (спружыны) пры нагружэнні сістэмы павялічваецца, то яго дэфармацыя Δl_i і адпаведная ёй сіла N_i лічацца дадатнымі. І наадварот. Знакі дэфармацыі ўстанаўліваем пасля вызначэння напрамкаў знешніх уздзеянняў $X_B = \sum X_{B_i}$, $M_D = \sum M_D(\vec{P}_i)$, якім адпавядаюць пэўныя напрамкі перамяшчэнняў δ_i шарніраў C_i (гл. рысункі 3, б, і 4, б). Калі праекцыі адрэзкаў δ_i на восі стрыжняў знаходзяцца ў межах стрыжняў, то іх дэфармацыі Δl_i і сілы N_i адмоўныя, а калі за межамі, то дадатныя. На рысунках 3, б; 4, б, яны адмоўныя, а стрыжні сціснутыя. А вось для стрыжня j на рысунку 3, а, і стрыжня k на рысунку 4, а, дэфармацыі і сілы дадатныя.

Прыклад. Механічная сістэма, утвораная з жорсткага цела A , замацаванага на апоры D , і пругкіх стрыжняў 1, 2, 3 знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы P і моманту M (рысунак 5). Вызначыць нормальныя сілы N_1 , N_2 , N_3 у стрыжнях. Дадзена: $E_1 = E_2 = E_3 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $F_1 = F_2 = 2$ см²; $F_3 = 3$ см²; $l_1 = 4$ м; $l_2 = 5$ м; $l_3 = 6$ м; $\alpha_1 = 90^\circ$; $\alpha_2 = 30^\circ$; $\alpha_3 = 45^\circ$; $a = 4$ м; $b = 6$ м; $c = 5$ м; $d = e = 3$ м; $P = 40$ кН; $M = 8$ кН · м.

Рашэнне. Аб'ект A (гл. рысунак 5) замацаваны з дапамогай апоры D і трох стрыжняў. Невядомымі сіламі з'яўляюцца X_D , Y_D , N_1 , N_2 , N_3 . Для плоскай сістэмы сіл можна скласці тры статычныя ўмовы раўнавагі. Значыць, разгляданая механічная сістэма двойчы статычна незначальная. Выкарыстаем апісаную вышэй методыку разліку. Для большай агляданасці алгарытм разлікаў рэалізуем у таблічнай форме (табліца 2).

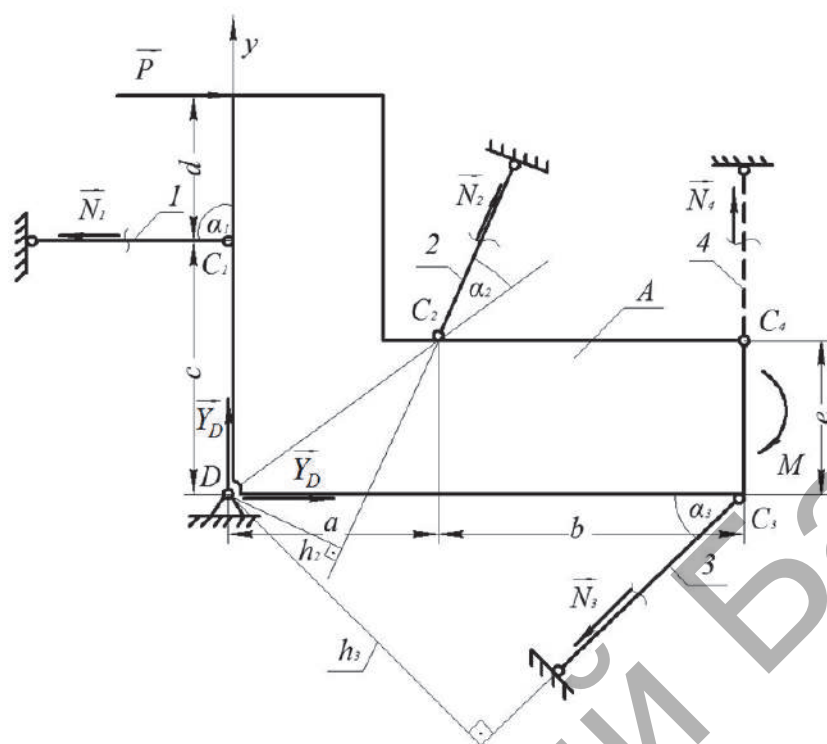


Рисунок 5. — Разліковая мадэль для лікавага прыкладу

Т а б л і ц а 2. — Алгарытм вылічэння ўнутраных сіл

| i | $c_i \cdot 10^{-7}$ (Н/м) | $c'_i \cdot 10^{-7}$ (Н/м) | h_i (м) | $c''_i \cdot 10^{-7}$ (Н/м) | $\bar{c}_i \cdot 10^{-7}$ (Н/м) | N_i (кН) |
|-----|---------------------------|----------------------------|-------------|-----------------------------|---------------------------------|-----------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 4 | 1 | 5 | 5 | 25 | 25 (11,1) |
| 2 | 4 | 0,8 | 2,5 | 2 | 5 | 10 (4,44) |
| 3 | 6 | 1 | $5\sqrt{2}$ | $5\sqrt{2}$ | 50 | $-25\sqrt{2}$ (-15,7) |
| 4 | 4 | 1 | 10 | 10 | 100 | 22,2 |

Па выніках графы 5 знаходзім прыведзеную да цэнтра D жорсткасць сістэмы $c_\varphi = \sum_{i=1}^3 c_i = 80 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Далей вызначаем $M_D = P(c + d) + M = 40 \cdot 8 + 80 = 400 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і знешнюю нагружанасць сістэмы $p_{\Sigma D} = M_D / c_\varphi = 5 \cdot 10^{-4}$. Па формуле (6) знаходзім сілы N_i і заносім іх у графу 6. Выконваем праверку канчатковага выніку. Паводле ўмовы раўнавагі аб'екта A $N_1 h_1 + N_2 h_2 + N_3 h_3 = M_D$, $25 \cdot 5 + 10 \cdot 2,5 + 25\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 400 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $400 \text{ кН} \cdot \text{м} = 400 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Выснова: праверка здавальняючая, памылак у разліках няма. Цяпер, пры неабходнасці, вызначаюцца рэакцыі X_D, Y_D з умоў раўнавагі $\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$.

У прыведзеным прыкладзе разгледжана двойчы статычна незначальная сістэма. Каб больш абгрунтавана ацаніць апісаны метада сілавога аналізу жорстка-пружкіх сістэм паглядзім, ці істотна ўскладняецца іх разлік пры павелічэнні колькасці стрыжняў. Для гэтай мэты на рысунку 5 дабаўляем стрыжань 4 з параметрамі, як у стрыжня 1; $h_4 = 10 \text{ м}$. Адпаведны яму радок 4 змешчаны ў канцы табліцы 2. Вылічваем новыя

характарыстыкі сістэмы па формуле $p_{\Sigma D} = M_D / c_\phi = 2,22 \cdot 10^{-4}$. $c_\phi = \sum_{i=1}^4 \bar{c}_i = 180 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Адпаведныя ім значэнні сіл N_i змешчаны ў графе 6 у дужках. Як бачым, разлік ускладняецца не істотна. А каб улічыць дадаткова стрыжань 4 з дапамогай тыпавай metodyкі, давялося б класці і рашыць сістэму алгебраічных ураўненняў 4-га парадку.

Некаторыя ўласцівасці механічных сістэм В і D. Кожная з сістэм утворана з аднаго цвёрдага цэла і сукупнасці пругкіх сувязей. Аб'екты A аднарухомыя, г. зн. што пры адсутнасці пругкіх элементаў накладзеныя на іх сувязі B ці D дапускаюць адну ступень свабоды — паступальнае ці вярчальнае перамяшчэнні. Абедзве сістэмы характарызуюцца пастаяннымі параметрамі жорсткасці c_x (Н/м) або c_ϕ (Н/м) і пастаяннымі нагружанасцямі $p_{\Sigma B}$ (м) ці $p_{\Sigma D}(\delta/p)$. У сістэме B сувязі тыпаў E, K можна перамяшчаць паралельна без змянення рэакцый. Дапускаецца адвольны перанос сувязі L . Пры павароце сувязей E і K вакол шарніраў, замацаваных на аб'екце A , на вугал 180° змяняецца знак рэакцыі і дэфармацыі. Аб'ект A можна абсталяваць дадатковымі сувязямі B_1, B_2, \dots , якія не ўплываюць на яго рухомасць (на рысунку 3 вось $B_1 x_1 \parallel Bx$). У сістэме D на велічыню рэакцый стрыжняў і спружын K не уплывае іх перамяшчэнне ўздоўж восей. З формулы (8), калі ўлічыць залежнасць $c'_i = c'_i h_i$, можна заўважыць, што сілы N_i у аднолькавых стрыжняў прапарцыянальны адлегласцям a восей ад цэнтра D . Гэта можна ўбачыць і ў графе 6 табліцы 2, дзе $N_4 = 2N_1$ пры $h_4 = 2h_1$. З той жа графы можна пераканацца, што павелічэнне колькасці стрыжняў у сістэме вядзе да натуральнага памяншэння велічынь унутраных сіл N_i .

Заклучэнне. Альтэрнатыўны метады сілавога аналізу жорстка-пружкіх механічных сістэм з выкарыстаннем тэарэмы нагружанасцей дазваляе больш эфектыўна і ў кароткія тэрміны праводзіць даследаванне вызначанага класу вучэбных і тэхнічных праблем. Да таго ж, адсутнасць у методыцы даследавання этапаў складання статычных, геаметрычных і фізічных залежнасцей дазваляе пазбегнуць у разліках найбольш распаўсюджаных памылак. Апісаны метады можа быць эфектыўна выкарыстаны як у вучэбнай і вучэбна-даследчай дзейнасці, так і ў праектаванні інжынерных канструкцый.

Спіс цытаваных крыніц

1. Механика материалов / Н. С. Траймак [и др.]. — Минск : Технопринт, 2002. — 194 с.
2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. — 2-е изд. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. — Т. 1. — 272 с.

Поступила в редакцию 15.05.2017