

ную на совершенствование профессиональных и информационных компетенций педагогов, создание условий для презентации ресурсных возможностей каждому педагогу и в целом повышение компетентности (качества).

Таким образом, выявляются профессиональные и информационные компетенции педагогов, что позволяет определить кадровый состав для реализации того или иного направления.

Заключение. Формирование информационной компетенции — это залог успешного специалиста во всех областях науки и техники. XXI век — век информатизации, а учебный предмет «Информатика» — главная ступень учащегося в современный образованный мир [1, с. 84].

Список цитируемых источников

1. Артёмова, Е. В. Формирование медиакомпетентности на учебных занятиях по информатике в средней общеобразовательной школе / Е. В. Артёмова // Техника и технологии: инновации и качество : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 19 дек. 2017 г. — Барановичи : БарГУ, 2018. — 176 с.

УДК 517.521.8

И. Н. Бруй, кандидат физико-математических наук, доцент
Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

К СУММИРУЕМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ

1. Введение. Пусть вещественное число $r > 0$ и последовательность $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ элементов банахова пространства **B** порождают ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (1)$$

и соответствующий ему координатный ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^r a_n. \quad (2)$$

Свойство экспоненты $\forall r \in Z_1 := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \forall n \in Z := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (e^{inx})^{(r)} = (in)^r e^{inx}$ объясняет появление последнего ряда. И пусть

$$\forall N \in Z_+ := \{0, 1, 2, \dots\} \quad Z_N^r(1) := \sum_{n=0}^N \left[1 - \left(\frac{n}{N+1} \right)^r \right] a_n \quad (3)$$

суть средние Зигмунда порядка r ряда (1), а

$$\forall N \in Z_+ \quad Z_N^r(2) := \sum_{n=0}^N \left[1 - \left(\frac{n}{N+1} \right)^r \right] n^r a_n \quad (4)$$

суть средние Зигмунда порядка r координатного ряда (2). В литературе средние Зигмунда называют ещё средними (Марцеля) Рисса, типическими средними, эталонными средними.

Теорема 1. Из ограниченности последовательности средних Зигмунда порядка $r > 0$ координатного ряда (2) в банаховом пространстве **B**

$$\sup_{N \in Z_+} \|Z_N^r(2)\|_{\mathbf{B}} =: A_1 < +\infty$$

вытекает сходимость средних Зигмунда порядка r исходного ряда (1) к сумме s в пространстве **B** со скоростью

$$\forall N \in Z_+ \quad \|s - Z_N^r(1)\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{3A_1}{(N+1)^r}.$$

Теорема 2. Из сходимости средних Зигмунда порядка $r > 0$ ряда (1) к сумме s в банаховом пространстве **B** со скоростью

$$\forall N \in Z_+ \quad \|s - Z_N^r(1)\|_{\mathbf{B}} \leq \frac{A_2}{(N+1)^r},$$

где A_2 есть положительная постоянная, вытекает ограниченность последовательности средних Зигмунда порядка r координатного ряда (2) в пространстве **B**

$$\sup_{N \in Z_+} \|Z_N^r(2)\|_{\mathbf{B}} \leq 4A_2.$$

В случае порядка $r = 1$ средние Зигмунда суть средние Фейера: $\forall N \in Z_+ \sigma_N := R_N^1$. Если средние Фейера комплексного координатного ряда (2) ограничены: $\sup_{N \in Z_+} |\sigma_N(2)| < +\infty$, то согласно известной теореме [1, с. 165, теорема 71] теории суммируемости числовых рядов средние Фейера исходного комплексного ряда (1) сходятся: $\exists s \in C \lim_{N \rightarrow +\infty} |s - \sigma_N(1)| = 0$. Первым скорость их сходимости установил Д. Алексич [2, с. 46, замечание] с коэффициентом 4 в заключении теоремы 1; значение коэффициента уменьшили до 3 Б. Сёкефальви-Надь [3, с. 84, лемма] и русский арийский математик С. Б. Стечкин [4, с. 464, лемма 2]. Для средних Фейера $\sigma_N := R_N^1$ теоремы 1 и 2 доказал Д. Алексич [5, с. 62–64].

Для общего случая средних Зигмунда порядка $r > 0$ теоремы 1 и 2 доказали Chen Tian-ping [6] и D. Králik [7, с. 362, теорема 1] с коэффициентами $O(1)$ при $N \rightarrow +\infty$; значения коэффициентов 3 и 4 получены автором [8, с. 28–37].

Применениям теорем 1 и 2 в теории приближений посвящены обзоры на английском [9], немецком [10] и венгерском [11] языках.

В настоящей работе теорема 1 со средних Фейера и (\subseteq) Зигмунда распространяется на матричные средние.

2. Суммируемость со скоростью. С помощью комплексной двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N, \nu) \in Z_+ \times Z_1}$, где номер строки N принимает неотрицательные целые значения $0, 1, 2, \dots$, а номер столбца ν принимает натуральные значения $1, 2, 3, \dots$:

$$(d_\nu(N))_{(N, \nu) \in Z_+ \times Z_1} := \begin{pmatrix} d_1(0) & d_2(0) & d_3(0) & \dots \\ d_1(1) & d_2(1) & d_3(1) & \dots \\ d_1(2) & d_2(2) & d_3(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{Z_+ \times Z_1} \quad (5)$$

образуем матричные средние

$$\forall N \in Z_+ \quad M_N(1) := \sum_{n=0}^N \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) \left(\frac{n}{N+1} \right)^\nu \right] a_n \quad (6)$$

ряда (1) и матричные средние

$$\forall N \in Z_+ \quad M_N(2) := \sum_{n=0}^N \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) \left(\frac{n}{N+1} \right)^\nu \right] n^r a_n \quad (7)$$

координатного ряда (2).

Очевидно: 1) если все $d_\nu(N) = 0$, то матричные средние суть частичные суммы s_N ; 2) если $d_1(N) = 1$, а остальные $d_\nu(N) = 0$, то матричные средние суть средние Фейера σ_N ; 3) если $d_r(N) = 1$, а остальные $d_\nu(N) = 0$, то матричные средние суть средние Зигмунда Z_N^r порядка r ($\sigma_N := Z_N^1$).

Для средних В. Рогозинского [12, с. 113, (13*)] $\forall N \in Z_+ \quad R_N(1) := \sum_{n=0}^N \left[\cos \frac{\pi n}{2(N+1)} \right] a_n$ ряда (1) с помощью канонического разложения функции косинус в степенной ряд получаем, что члены двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N, \nu) \in Z_+ \times Z_1}$ с нечётными номерами столбцов $d_{2\nu-1}(N) = 0$, а с чётными номерами столбцов $d_{2\nu}(N) = (-1)^{\nu-1} \{1 / [(2\nu)!]\} (\pi/2)^{2\nu}$ ($\nu \in Z_1$).

Для внешне схожих с $R_N(1)$ средних С. Н. Бернштейна [13, с. 523, (2)] $\forall N \in Z_+$

$B_N(1) := \sum_{n=0}^N \left(\cos \frac{\pi n}{2N+1} \right) a_n$ ряда (1) члены двойной последовательности $(d_\nu(N))_{(N, \nu) \in Z_+ \times Z_1}$ с нечётными номерами столбцов также равны нулю: $d_{2\nu-1}(N) = 0$, а с чётными номерами столбцов уже явно зависят от номера строки N : $d_{2\nu}(N) = (-1)^{\nu-1} \{1 / [(2\nu)!]\} (\pi/2)^{2\nu} [1 + 1/(2N+1)]^{2\nu}$ ($\nu \in Z_1$).

Теорема 3. Пусть комплексная двойная последовательность (5) удовлетворяет условию

$$\sup_{N \in Z_+} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_\nu(N)| =: A_3 < +\infty \quad (8)$$

и при натуральном $r \in Z_2 := \{2, 3, 4, \dots\}$ первые столбцы с номерами ν от 1 до $r-1$ удовлетворяют условиям

$$\exists A_4 > 0 \quad \forall N \in Z_+ \quad \forall \nu \in [1, r-1] \cap Z_1 \quad |d_\nu(N)| \leq \frac{A_4}{(N+1)^{r-\nu}} \quad (9)$$

И пусть описанная выше комплексная двойная последовательность (5) и координатный ряд (2) связаны между собой условием

$$\sup_{N \in Z_+} \left[\left(\sup_{0 \leq M \leq N} \|s_M(2)\|_{\mathbf{B}} \right) \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(N) \right| \right] =: A_5 < +\infty. \quad (10)$$

Тогда из ограниченности последовательности матричных средних (7) координатного ряда (2) в банаховом пространстве \mathbf{B}

$$\sup_{N \in Z_+} \|M_N(2)\|_{\mathbf{B}} =: A_6 < +\infty \quad (11)$$

вытекает сходимость матричных средних (6) исходного ряда (1) к сумме s в пространстве \mathbf{B} со скоростью

$$\|s - M_N(1)\|_{\mathbf{B}} = O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad N \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Для средних Зигмунда натурального порядка $r \in Z_1$ у двойной последовательности $(d_{\nu}(N))_{(N, \nu) \in Z_+ \times Z_1}$ столбец r -ый состоит из единиц: $\forall N \in Z_+, d_r(N) = 1$, а остальные столбцы состоят из нулей: $\forall \nu \in Z_1 \setminus \{r\} \forall N \in Z_+, d_{\nu}(N) = 0$. Поэтому условие (8) выполняется: $\forall N \in Z_+, \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu |d_{\nu}(N)| = r =: A_3 < +\infty$. Так как первые столбцы с номерами ν от 1 до $r-1$ состоят из нулей, то условие (9) также выполняется: $\forall N \in Z_+, \forall \nu \in [1, r-1] \cap Z_1 |d_{\nu}(N)| = 0 < \frac{1}{(N+1)^{r-\nu}}$.

Итак, средние Зигмунда натурального порядка $r = 1, 2, 3, \dots$ удовлетворяют условиям (8) и (9) теоремы 3 и в этом специальном случае постоянная A_6 в посылке (11) теоремы 3 равна постоянной A_1 в посылке теоремы 1: $A_1 = A_6$. Последнее равенство будет многократно использоваться ниже без пояснения.

3. Доказательство теоремы 3. Шаг 1. Выразим разность Коши членов последовательности $(M_N(1))_{N=0}^{+\infty}$ матричных средних (6) ряда (1) через члены последовательности $(M_N(2))_{N=0}^{+\infty}$ матричных средних (7) координатного ряда (2).

Для разности последующего и предыдущего членов последовательности $(M_N(1))_{N=0}^{+\infty}$ имеем

$$\begin{aligned} M_K(1) - M_{K-1}(1) &= \sum_{n=0}^K \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K) \left(\frac{n}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_n - \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K-1) \left(\frac{n}{K} \right)^{\nu} \right] a_n = \\ &= \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_K + \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K) \left(\frac{n}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_n - \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K-1) \left(\frac{n}{K} \right)^{\nu} \right] a_n = \\ &= \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_K + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu} a_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Из аналогичной (13) формулы для разности последующего и предыдущего членов последовательности $(M_N(2))_{N=0}^{+\infty}$ матричных средних (7) координатного ряда (2)

$$M_K(2) - M_{K-1}(2) = \left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] K^r a_K + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu+r} a_n$$

получаем

$$\left[1 - \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_{\nu}(K) \left(\frac{K}{K+1} \right)^{\nu} \right] a_K = \frac{1}{K^r} [M_K(2) - M_{K-1}(2)] - \frac{1}{K^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu+r} a_n. \quad (14)$$

Подстановка (14) в (13) даёт

$$\begin{aligned} M_K(1) - M_{K-1}(1) &= \frac{1}{K^r} [M_K(2) - M_{K-1}(2)] - \frac{1}{K^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu+r} a_n + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} n^{\nu} a_n = \\ &= \frac{1}{K^r} [M_K(2) - M_{K-1}(2)] + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{d_{\nu}(K-1)}{K^{\nu}} - \frac{d_{\nu}(K)}{(K+1)^{\nu}} \right] \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \left(\frac{n}{K} \right)^r \right] n^{\nu} a_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Просуммируем разности (15) по K от $N+1$ до P :

$$\begin{aligned} M_P(1) - M_N(1) &= \sum_{K=N+1}^P [M_K(1) - M_{K-1}(1)] \stackrel{(10)}{=} \\ &= \sum_{K=N+1}^{P-1} \frac{1}{K^r} [M_K(2) - M_{K-1}(2)] + \sum_{K=N+1}^P \sum_{v=1}^{+\infty} \left[\frac{d_v(K-1)}{K^v} - \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \right] \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \left(\frac{n}{K} \right)^r \right] n^v a_n. \end{aligned}$$

В предыдущем равенстве правую часть преобразуем по методу Абеля:

$$\begin{aligned} M_P(1) - M_N(1) &= \sum_{K=N+1}^P \frac{1}{K^r} M_K(2) - \sum_{K=N}^{P-1} \frac{1}{(K+1)^r} M_K(2) + \\ &+ \sum_{K=N}^{P-1} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=0}^K \left[1 - \left(\frac{n}{K+1} \right)^r \right] n^v a_n - \sum_{K=N+1}^P \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \left(\frac{n}{K} \right)^r \right] n^v a_n = \\ &= \frac{1}{P^r} M_P(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] M_K(2) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(2) + \\ &+ \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=0}^N \left[1 - \left(\frac{n}{N+1} \right)^r \right] n^v a_n + \\ &+ \sum_{K=N+1}^{P-1} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \left\{ \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] K^v a_K + \sum_{n=0}^{K-1} \left[\left(\frac{n}{K} \right)^r - \left(\frac{n}{K+1} \right)^r \right] n^v a_n \right\} - \\ &- \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=0}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{n}{P} \right)^r \right] n^v a_n. \end{aligned}$$

Отсюда получаем первое стартовое представление ($P > N+1$):

$$\begin{aligned} M_P(1) - M_N(1) &= \frac{1}{P^r} M_P(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] M_K(2) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(2) + \\ &+ \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=0}^N n^v a_n - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=0}^N n^v \cdot n^r a_n + \\ &+ \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] a_K \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^v d_v(K) + \\ &+ \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=0}^{K-1} n^v \cdot n^r a_n - \\ &- \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=0}^{P-1} n^v a_n + \frac{1}{P^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=0}^{P-1} n^v \cdot n^r a_n. \end{aligned} \quad (16)$$

Шаг 2. У матрицы (5) в специальном случае средних Зигмунда натурального порядка r -ый ($r \in Z_1$) столбец состоит из единиц: $\forall N \in Z_+$ $d_r(N) = 1$, а остальные столбцы состоят из нулей: $\forall v \in Z_1 \setminus \{r\} \quad \forall N \in Z_+$ $d_v(N) = 0$. Поэтому предыдущее представление (16) с учётом определений (3) и (4) принимает вид

$$\begin{aligned} Z_P^r(1) - Z_N^r(1) &= \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] Z_K^r(2) - \frac{1}{(N+1)^r} Z_N^r(2) + \\ &+ \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^N n^r a_n - \frac{1}{(N+1)^r} \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^N n^r \cdot n^r a_n + \\ &+ \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] a_K \left(\frac{K}{K+1} \right)^r + \\ &+ \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{1}{(K+1)^r} \sum_{n=0}^{K-1} n^r \cdot n^r a_n - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(P+1)^r} \sum_{n=0}^{P-1} n^r a_n + \frac{1}{P^r} \frac{1}{(P+1)^r} \sum_{n=0}^{P-1} n^r \cdot n^r a_n = \\
& = \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] Z_K^r(2) - \frac{1}{(N+1)^r} Z_N^r(2) + \\
& + \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^N \left[1 - \left(\frac{n}{N+1} \right)^r \right] n^r a_n + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] a_K \left(\frac{K}{K+1} \right)^r + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^{K-1} \left(\frac{n}{K+1} \right)^r n^r a_n - \frac{1}{(P+1)^r} \sum_{n=0}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{n}{P} \right)^r \right] n^r a_n \stackrel{(4)}{=} \\
& \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] Z_K^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] a_K \left(\frac{K}{K+1} \right)^r + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^{K-1} \left(\frac{n}{K+1} \right)^r n^r a_n - \frac{1}{(P+1)^r} Z_{P-1}^r(2). \tag{17}
\end{aligned}$$

Для предпоследней компоненты правой части (17) имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^{K-1} \left(\frac{n}{K+1} \right)^r n^r a_n = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \left\{ - \sum_{n=0}^K \left[1 - \left(\frac{n}{K+1} \right)^r \right] n^r a_n - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r K^r a_K + \sum_{n=0}^K n^r a_n \right\} \stackrel{(4)}{=} \\
& \stackrel{(4)}{=} \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \left\{ - Z_K^r(2) - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r K^r a_K + \sum_{n=0}^K n^r a_n \right\} = \\
& = - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] Z_K^r(2) - \sum_{K=N+1}^{P-1} \frac{1}{K^r} \left(\frac{K}{K+1} \right)^r K^r a_K + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \frac{1}{(K+1)^r} \left(\frac{K}{K+1} \right)^r K^r a_K + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^K n^r a_n = \\
& = - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] Z_K^r(2) - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left(\frac{K}{K+1} \right)^r a_K + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left(\frac{K}{K+1} \right)^{2r} a_K + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^K n^r a_n = \\
& = - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] Z_K^r(2) - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] a_K \left(\frac{K}{K+1} \right)^r + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^K n^r a_n. \tag{18}
\end{aligned}$$

Подстановка (18) в (17) приводит к

$$Z_P^r(1) - Z_N^r(1) = \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{n=0}^K n^r a_n - \frac{1}{(P+1)^r} Z_{P-1}^r(2). \tag{19}$$

Из определения (4), помня, что индекс суммирования «немой», по методу Абеля получаем

$$\begin{aligned}
Z_N^r(2) & = \sum_{n=0}^N n^r a_n - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^N n^r \cdot n^r a_n = \\
& = \sum_{m=0}^N m^r a_m - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^N n^r \cdot \left(\sum_{m=0}^n m^r a_m - \sum_{m=0}^{n-1} m^r a_m \right) = \\
& = \sum_{m=0}^N m^r a_m - \frac{1}{(N+1)^r} \left[\sum_{n=0}^N n^r \sum_{m=0}^n m^r a_m - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)^r \sum_{m=0}^n m^r a_m \right] = \\
& = \sum_{m=0}^N m^r a_m - \frac{1}{(N+1)^r} \left\{ N^r \sum_{m=0}^N m^r a_m + \sum_{n=0}^{N-1} [n^r - (n+1)^r] \sum_{m=0}^n m^r a_m \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^N m^r a_m - \left(\frac{N}{N+1}\right)^r \sum_{m=0}^N m^r a_m + \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^{N-1} [(n+1)^r - n^r] \sum_{m=0}^n m^r a_m = \\
&= \frac{1}{(N+1)^r} [(N+1)^r - N^r] \sum_{m=0}^N m^r a_m + \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^{N-1} [(n+1)^r - n^r] \sum_{m=0}^n m^r a_m = \\
&= \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{n=0}^N [(n+1)^r - n^r] \sum_{m=0}^n m^r a_m .
\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
(N+1)^r Z_N^r(2) &= \sum_{n=0}^N [(n+1)^r - n^r] \sum_{m=0}^n m^r a_m = \\
&= [(N+1)^r - N^r] \sum_{m=0}^N m^r a_m + \sum_{n=0}^{N-1} [(n+1)^r - n^r] \sum_{m=0}^n m^r a_m = \\
&= [(N+1)^r - N^r] \sum_{m=0}^N m^r a_m + N^r Z_{N-1}^r(2) .
\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\forall K \in Z_+ \quad \sum_{n=0}^K n^r a_n = \frac{(K+1)^r Z_K^r(2) - K^r Z_{K-1}^r(2)}{(K+1)^r - K^r} . \quad (20)$$

Подставляем (20) в (19) и результат преобразуем по методу Абеля:

$$\begin{aligned}
Z_P^r(1) - Z_N^r(1) &= \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \frac{(K+1)^r - K^r}{K^r (K+1)^r} \frac{(K+1)^r Z_K^r(2) - K^r Z_{K-1}^r(2)}{(K+1)^r - K^r} \frac{1}{(P+1)^r} Z_{P-1}^r(2) = \\
&= \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} Z_K^r(2) - \frac{1}{(K+1)^r} Z_{K-1}^r(2) \right] \frac{1}{(P+1)^r} Z_{P-1}^r(2) = \\
&= \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \frac{1}{K^r} Z_K^r(2) - \sum_{K=N}^{P-2} \frac{1}{(K+2)^r} Z_K^r(2) - \frac{1}{(P+1)^r} Z_{P-1}^r(2) = \\
&= \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+2)^r} \right] Z_K^r(2) - \frac{1}{(N+2)^r} Z_N^r(2) .
\end{aligned}$$

Таким образом, из первого стартового представления (16) в специальном случае средних Зигмунда натурального порядка $r=1, 2, 3, \dots$ имеем известное [7, с. 363; 8, с. 30] представление для разности Коши ($P > N+1$):

$$Z_P^r(1) - Z_N^r(1) = \frac{1}{P^r} Z_P^r(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+2)^r} \right] Z_K^r(2) - \frac{1}{(N+2)^r} Z_N^r(2) .$$

Шаг 3. Работаем с четвёртой и предпоследней восьмой компонентами правой части первого стартового представления (16).

По методу Абеля имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N n^v a_n &= \sum_{n=1}^N n^v a_n = \sum_{n=1}^N n^{v-r} \cdot n^r a_n = \sum_{n=1}^N n^{v-r} \cdot \left(\sum_{m=0}^n m^r a_m - \sum_{m=0}^{n-1} m^r a_m \right) = \\
&= \sum_{n=1}^N n^{v-r} \sum_{m=0}^n m^r a_m - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)^{v-r} \sum_{m=0}^n m^r a_m = \\
&= N^{v-r} \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} [(n+1)^{v-r} - n^{v-r}] \sum_{m=0}^n m^r a_m - (0+1)^{v-r} \sum_{m=0}^0 m^r a_m = \\
&= N^{v-r} \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} [(n+1)^{v-r} - n^{v-r}] \sum_{m=0}^n m^r a_m .
\end{aligned}$$

В последнюю компоненту правой части предыдущего равенства подставляем соотношения (20) и полученный результат преобразуем по методу Абеля:

$$\sum_{n=1}^N n^v a_n \stackrel{(20)}{=} N^{v-r} \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} [(n+1)^{v-r} - n^{v-r}] \frac{(n+1)^r Z_n^r(2) - n^r Z_{n-1}^r(2)}{(n+1)^r - n^r} =$$

$$\begin{aligned}
&= N^{v-r} \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^{v-r} - n^{v-r}}{(n+1)^r - n^r} (n+1)^r Z_n^r(2) + \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(n+2)^{v-r} - (n+1)^{v-r}}{(n+2)^r - (n+1)^r} (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&= N^{v-r} \sum_{m=0}^N m^r a_m - \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \\
&+ \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(n+2)^{v-r} - (n+1)^{v-r}}{(n+2)^r - (n+1)^r} - \frac{(n+1)^{v-r} - n^{v-r}}{(n+1)^r - n^r} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) + \frac{(0+2)^{v-r} - (0+1)^{v-r}}{(0+2)^r - (0+1)^r} (0+1)^r Z_0^r(2) = \\
&= N^{v-r} s_N(2) - \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2),
\end{aligned}$$

где 1) по определению $\forall N \in \mathbb{Z}_+$ $\sum_{m=0}^N m^r a_m =: s_N(2)$ и, очевидно, что частичная сумма порядка 0 координатного

ряда (2) $s_0(2) := \sum_{m=0}^0 m^r a_m = 0$, 2) по определению двойная подстановка $h(u) \Big|_{u=n}^{u=n+1} := h(n+1) - h(u)$, 3) среднее

Зигмунда порядка 0 координатного ряда (2) $Z_0^r(2) := \sum_{n=0}^0 \left[1 - \left(\frac{n}{0+1} \right)^r \right] n^r a_n = 0$.

Таким образом, двукратным применением преобразования Абеля мы получили следующие соотношения: $\forall N \in \mathbb{Z}_1$

$$\sum_{n=1}^N n^v a_n = N^{v-r} s_N(2) - \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2), \quad (21)$$

где средние Зигмунда отрицательного порядка по определению суть нули.

С помощью соотношений (21) для четвёртой компоненты правой части первого стартового представления (16) получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=0}^N n^v a_n \stackrel{(21)}{=} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^N n^v a_n \stackrel{(21)}{=} \\
&\stackrel{(21)}{=} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \left\{ N^{v-r} s_N(2) - \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \right\} = \\
&= \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{N}{N+1} \right)^v d_v(N) - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) + \\
&\quad + \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&= \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{N}{N+1} \right)^v \right] d_v(N) - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) + \\
&\quad + \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&= \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(N) - \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right)^v \right] d_v(N) - \\
&\quad - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \quad (22)$$

Аналогично предыдущему для предпоследней восьмой компоненты правой части первого стартового представления (16) получаем

$$\begin{aligned} & - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=0}^{P-1} n^v a_n = - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-1} n^v a_n \stackrel{(21)}{=} \\ & \stackrel{(21)}{=} - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \left\{ (P-1)^{v-r} s_{P-1}(2) - \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P-1)^r - (P-2)^r} (P-1)^r Z_{P-2}^r(2) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \right\} = \\ & = - \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v d_v(P) + \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P+1)^v} d_v(P) - \\ & \quad - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\ & = - \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) + \\ & \quad + \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P+1)^v} d_v(P) - \\ & \quad - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\ & = - \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) + \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) + \\ & \quad + \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P+1)^v} d_v(P) - \\ & \quad - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \quad (23) \end{aligned}$$

Шаг 4. Сейчас работаем с пятой и последней девятой компонентами правой части первого стартового представления (16).

Также по методу Абеля имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N n^v \cdot n^r a_n &= \sum_{n=1}^N n^v \cdot n^r a_n = \sum_{n=1}^N n^v \cdot \left(\sum_{m=0}^n m^r a_m - \sum_{m=0}^{n-1} m^r a_m \right) = \\ &= \sum_{n=1}^N n^v \sum_{m=0}^n m^r a_m - \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)^v \sum_{m=0}^n m^r a_m = \\ &= N^v \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} [(n+1)^v - n^v] \sum_{m=0}^n m^r a_m - (0+1)^v \sum_{m=0}^0 m^r a_m = \\ &= N^v \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} [(n+1)^v - n^v] \sum_{m=0}^n m^r a_m. \end{aligned}$$

Подставляем соотношения (20) в последнюю компоненту правой части предыдущего равенства и полученный результат преобразуем по методу Абеля:

$$\sum_{n=0}^N n^v \cdot n^r a_n \stackrel{(20)}{=} N^v \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} [(n+1)^v - n^v] \frac{(n+1)^r Z_n^r(2) - n^r Z_{n-1}^r(2)}{(n+1)^r - n^r} =$$

$$\begin{aligned}
&= N^\nu \sum_{m=0}^N m^r a_m - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^\nu - n^\nu}{(n+1)^r - n^r} (n+1)^r Z_n^r(2) + \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(n+2)^\nu - (n+1)^\nu}{(n+2)^r - (n+1)^r} (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&= N^\nu \sum_{m=0}^N m^r a_m - \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \\
&+ \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(n+2)^\nu - (n+1)^\nu}{(n+2)^r - (n+1)^r} - \frac{(n+1)^\nu - n^\nu}{(n+1)^r - n^r} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) + \frac{(0+2)^\nu - (0+1)^\nu}{(0+2)^r - (0+1)^r} (0+1)^r Z_0^r(2) = \\
&= N^\nu s_N(2) - \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2).
\end{aligned}$$

Стало быть, по схеме предыдущего шага 3 двукратным применением преобразования Абеля мы получили следующие соотношения: $\forall N \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{n=0}^N n^\nu \cdot n^r a_n = N^\nu s_N(2) - \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \quad (24)$$

Nota bene, соотношения (24) справедливы $\forall N \in \mathbb{Z}_+$, а соотношения (21) справедливы $\forall N \in \mathbb{Z}_1$. Последнее ограничение позволяет избежать в правой части (21) нулей в отрицательной степени.

Для пятой компоненты правой части первого стартового представления (16) с помощью соотношений (24) получаем

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=0}^N n^\nu \cdot n^r a_n \stackrel{(24)}{=} -\frac{1}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \left\{ N^\nu s_N(2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{N^r - (N-1)^r} N^r Z_{N-1}^r(2) + \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \right\} = \\
&= -\frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left(\frac{N}{N+1} \right)^\nu d_\nu(N) + \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) - \\
&\quad - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&\quad = -\frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{N}{N+1} \right)^\nu \right] d_\nu(N) + \\
&\quad + \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) - \\
&\quad - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&= -\frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} d_\nu(N) + \frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right)^\nu \right] d_\nu(N) + \\
&\quad + \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{N^\nu - (N-1)^\nu}{(N+1)^\nu} d_\nu(N) - \\
&\quad - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(N)}{(N+1)^\nu} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^\nu - u^\nu}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \quad (25)
\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему для последней девятой компоненты правой части первого стартового представления (16) получаем

$$\frac{1}{P^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \sum_{n=0}^{P-1} n^\nu \cdot n^r a_n \stackrel{(24)}{=} \frac{1}{P^r} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{d_\nu(P)}{(P+1)^\nu} \left\{ (P-1)^\nu s_{P-1}(2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P-1)^r - (P-2)^r} (P-1)^r Z_{P-2}^r(2) + \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \Big\} = \\
& = \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v d_v(P) - \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P+1)^v} d_v(P) + \\
& \quad + \frac{1}{P^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
& \quad = \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) - \\
& \quad - \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P+1)^v} d_v(P) + \\
& \quad + \frac{1}{P^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
& \quad = \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) - \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) - \\
& \quad - \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P+1)^v} d_v(P) + \\
& \quad + \frac{1}{P^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \tag{26}
\end{aligned}$$

Шаг 5. Преобразуем по методу Абеля шестую компоненту правой части первого стартового представления (16):

$$\begin{aligned}
& \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] a_K \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^v d_v(K) \stackrel{\text{Nota bene}}{=} \\
& \stackrel{\text{Nota bene}}{=} \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^r \right] \frac{1}{K^r} \left(\sum_{n=0}^K n^r a_n - \sum_{n=0}^{K-1} n^r a_n \right) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^v d_v(K) = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \left(\sum_{n=0}^K n^r a_n - \sum_{n=0}^{K-1} n^r a_n \right) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^v d_v(K) = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^v d_v(K) - \\
& \quad - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^v d_v(K) = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& \quad - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) - \\
& \quad - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K), \tag{27}
\end{aligned}$$

где, напоминаем, по определению $\forall K \in Z_+ \sum_{n=0}^K n^r a_n =: s_K(2)$.

Шаг 6. Подставляем соотношения (24) в оставшуюся седьмую компоненту правой части первого стартового представления (16):

$$\begin{aligned}
& \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=0}^{K-1} n^v \cdot n^r a_n \stackrel{(24)}{=} \\
& \stackrel{(24)}{=} \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \left\{ (K-1)^v s_{K-1}(2) - \right. \\
& \left. - \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K-1)^r - (K-2)^r} (K-1)^r Z_{K-2}^r(2) + \sum_{n=1}^{K-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \right\} = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^v d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{(K-1)^r - (K-2)^r} Z_{K-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K+1)^v} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=1}^{K-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - 1 + \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{(K-1)^r - (K-2)^r} Z_{K-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K+1)^v} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=1}^{K-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
& = \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{(K-1)^r - (K-2)^r} Z_{K-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K+1)^v} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=1}^{K-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \tag{28}
\end{aligned}$$

Шаг 7. Первое стартовое представление (16) после подстановки в него последовательно соотношений (22), (25), (27), (28), (23) и (26) примет следующий вид ($P > N + 1$):

$$\begin{aligned}
M_P(1) - M_N(1) &= \frac{1}{P^r} M_P(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] M_K(2) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(2) + \\
& + \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(N) - \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right)^v \right] d_v(N) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) + \\
& + \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) - \\
& - \frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(N) + \frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right)^v \right] d_v(N) + \\
& + \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^v - (N-1)^v}{(N+1)^v} d_v(N) - \\
& - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{(K-1)^r - (K-2)^r} Z_{K-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K+1)^v} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=1}^{K-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) - \\
& - \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) + \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) + \\
& + \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P+1)^v} d_v(P) - \\
& - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) + \\
& + \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) - \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) - \\
& - \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P+1)^v} d_v(P) + \\
& + \frac{1}{P^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \tag{29}
\end{aligned}$$

Из (29) с учётом очевидных равенств

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(N) - \frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(N) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) = \\
& = \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K), \\
& - \frac{1}{N^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right)^v \right] d_v(N) + \frac{1}{(N+1)^r} s_N(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{N}{N+1} \right)^v \right] d_v(N) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) = \\
& = - \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K), \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) = 0, \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) = \\
& = - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{K^v - (K-1)^v}{(K+1)^v} d_v(K), \\
& - \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) + \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) = \\
& = - \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(P-1)^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) - \frac{1}{P^r} s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) = \\
& = \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P)
\end{aligned}$$

получаем первое рабочее соотношение ($P > N+1$):

$$\begin{aligned}
M_P(1) - M_N(1) &= \frac{1}{P^r} M_P(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] M_K(2) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(2) - \\
& - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) + \\
& + \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]_{u=n}^{u=n+1} (n+1)^r Z_n^r(2) + \\
& + \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^v - (N-1)^v}{(N+1)^v} d_v(N) - \\
& - \frac{1}{(N+1)^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \right]_{u=n}^{u=n+1} (n+1)^r Z_n^r(2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_K(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{K}{K+1} \right)^v \right] d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] s_{K-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{K^v - (K-1)^v}{(K+1)^v} d_v(K) - \\
& - \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{(K-1)^r - (K-2)^r} Z_{K-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K+1)^v} d_v(K) + \\
& + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(K)}{(K+1)^v} \sum_{n=1}^{K-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) + \\
& + \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P+1)^v} d_v(P) - \\
& - \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) - \\
& - \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} d_v(P) + \left[\frac{1}{(P-1)^r} - \frac{1}{P^r} \right] s_{P-1}(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{P-1}{P+1} \right)^v \right] d_v(P) - \\
& - \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P+1)^v} d_v(P) + \\
& + \frac{1}{P^r} \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(P)}{(P+1)^v} \sum_{n=1}^{P-3} \left[\frac{(u+1)^v - u^v}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2). \tag{30}
\end{aligned}$$

Шаг 8. Для нормы первых трёх компонент правой части (30) в силу посылки (11) теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{P^r} M_P(2) + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] M_K(2) - \frac{1}{(N+1)^r} M_N(2) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\
& \leq A_6 \left\{ \frac{1}{P^r} + \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] + \frac{1}{(N+1)^r} \right\} = \frac{2A_6}{(N+1)^r}. \tag{31}
\end{aligned}$$

Шаг 9. Четвёртую компоненту правой части (30) разбиваем на две:

$$\begin{aligned}
& - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) = \\
& = \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{r-1} \left[\frac{1}{(N-1)^{r-v}} - \frac{1}{N^{r-v}} \right] \frac{1}{(N+1)^v} d_v(N) - \\
& - \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=r+1}^{+\infty} \left[N^{v-r} - (N-1)^{v-r} \right] \frac{d_v(N)}{(N+1)^v}. \tag{32}
\end{aligned}$$

Из формулы Ньютона — Лейбница

$$N^{v-r} - (N-1)^{v-r} = (v-r) \int_{N-1}^N t^{v-r-1} dt \quad (v \neq r)$$

получаем две оценки сверху:

$$\forall v \in [1, r-1] \cap Z_1 \quad \frac{1}{(N-1)^{r-v}} - \frac{1}{N^{r-v}} \leq \frac{r-v}{(N-1)^{r-v+1}}, \tag{33}$$

$$\forall v \in [r+1, +\infty) \cap Z_1 \quad N^{v-r} - (N-1)^{v-r} \leq (v-r) N^{v-r-1}, \tag{34}$$

а из формулы Ньютона — Лейбница

$$N^v - (N-1)^v = v \int_{N-1}^N t^{v-1} dt \quad (v \neq 0)$$

получаем двусторонние оценки

$$\forall v \in Z_1 \quad v(N-1)^{v-1} \leq N^v - (N-1)^v \leq vN^{v-1}. \quad (35)$$

Для нормы первой компоненты правой части (32) в силу левого неравенства (35), посылки (11), оценки сверху (33) и условия (9) имеем оценку

$$\begin{aligned} \forall N \in Z_2 \quad & \left\| \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r (2) \sum_{v=1}^{r-1} \left[\frac{1}{(N-1)^{r-v}} - \frac{1}{N^{r-v}} \right] \frac{1}{(N+1)^v} d_v(N) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\ & \leq \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}} A_1 \sum_{v=1}^{r-1} \frac{r-v}{(N-1)^{r-v+1}} \frac{1}{(N+1)^v} \frac{A_4}{(N+1)^{r-v}} = \\ & = A_1 A_4 \frac{N^r}{r(N-1)^r (N+1)^r} \sum_{v=1}^{r-1} \frac{r-v}{(N-1)^{r-v}} \leq A_1 A_4 \frac{N^r}{r(N-1)^r (N+1)^r} (r-1) \sum_{v=1}^{r-1} \frac{1}{(N-1)^{r-v}} \leq \\ & \leq A_1 A_4 \frac{N^r}{r(N-1)^r (N+1)^r} (r-1)^2 = A_1 A_4 \left(1 - \frac{1}{r}\right) (r-1) \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^r \frac{1}{(N+1)^r} \leq \frac{2^r (r-1) A_1 A_4}{(N+1)^r}. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично для нормы второй (последней) компоненты правой части (32) в силу левого неравенства (35), посылки (11), оценки сверху (34) и условия (8) получаем оценку

$$\begin{aligned} \forall N \in Z_2 \quad & \left\| \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r (2) \sum_{v=r+1}^{+\infty} \left[N^{v-r} - (N-1)^{v-r} \right] \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\ & \leq \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}} A_1 \sum_{v=r+1}^{+\infty} (v-r) N^{v-r-1} \frac{|d_v(N)|}{(N+1)^v} = \\ & = \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1} (N+1)^{r+1}} A_1 \sum_{v=r+1}^{+\infty} (v-r) \left(\frac{N}{N+1}\right)^{v-r-1} |d_v(N)| \leq \\ & \leq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^{r-1} \frac{N}{N+1} \frac{A_1}{(N+1)^r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} v |d_v(N)| \leq \frac{2^{r-1} A_1 A_3}{r(N+1)^r}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (32), (36) и (37) для нормы четвёртой компоненты правой части (30) имеем оценку

$$\begin{aligned} \forall N \in Z_2 \quad & \left\| \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r (2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^{v-r} - (N-1)^{v-r}}{(N+1)^v} d_v(N) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\ & \leq 2^r A_1 \left[(r-1) A_4 + \frac{1}{2r} A_3 \right] \frac{1}{(N+1)^r}. \end{aligned} \quad (38)$$

Для нормы тринадцатой компоненты правой части (30) аналогично предыдущему получаем оценку

$$\begin{aligned} \forall P \in Z_3 := \{3, 4, 5, \dots\} \quad & \left\| \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r (2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^{v-r} - (P-2)^{v-r}}{(P+1)^v} d_v(P) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\ & \leq \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^{r-1}} A_1 \sum_{v=1}^{r-1} \frac{r-v}{(P-2)^{r-v+1}} \frac{1}{(P+1)^v} \frac{A_4}{(P+1)^{r-v}} + \\ & + \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^{r-1} (P+1)^{r+1}} A_1 \sum_{v=r+1}^{+\infty} (v-r) \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{v-r-1} |d_v(N)| \leq \\ & \leq A_1 A_4 \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^r (P+1)^r} (r-1) \sum_{v=1}^{r-1} \frac{1}{(P-2)^{r-v}} + \\ & + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{P-2}\right)^{r-1} \frac{P-1}{P+1} \frac{A_1}{(P+1)^r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} v |d_v(N)| \leq \\ & \leq A_1 A_4 \left(1 - \frac{1}{r}\right) (r-1) \left(1 + \frac{1}{P-2}\right)^r \frac{1}{(P+1)^r} + \frac{2^{r-1} A_1 A_3}{r(P+1)^r} \leq \\ & \leq 2^r A_1 \left[(r-1) A_4 + \frac{1}{2r} A_3 \right] \frac{1}{(P+1)^r}. \end{aligned} \quad (39)$$

Шаг 10. Для нормы шестой компоненты правой части (30) в силу последовательно левого и правого неравенства (35), посылки (11) и условия (8) имеем оценку

$$\begin{aligned}
\forall N \in Z_2 \left\| \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{N^r - (N-1)^r} Z_{N-1}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{N^v - (N-1)^v}{(N+1)^v} d_v(N) \right\|_{\mathbf{B}} &\leq \\
&\leq \frac{1}{(N+1)^r} \frac{N^r}{r(N-1)^{r-1}} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{vN^{v-1}}{(N+1)^v} |d_v(N)| = \\
&= \frac{1}{(N+1)^r} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^{r-1} \frac{N}{N+1} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{N}{N+1}\right)^{v-1} v |d_v(N)| \leq \\
&\leq \frac{1}{(N+1)^r} \frac{2^{r-1}}{r} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} v |d_v(N)| \leq \frac{2^{r-1} A_1 A_3}{r(N+1)^r}. \tag{40}
\end{aligned}$$

Для нормы семнадцатой компоненты правой части (30) аналогично предыдущему получаем оценку

$$\begin{aligned}
\forall P \in Z_3 \left\| \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{(P-1)^r - (P-2)^r} Z_{P-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(P-1)^v - (P-2)^v}{(P+1)^v} d_v(P) \right\|_{\mathbf{B}} &\leq \\
&\leq \frac{1}{P^r} \frac{(P-1)^r}{r(P-2)^{r-1}} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{v(P-1)^{v-1}}{(P+1)^v} |d_v(N)| = \\
&= \frac{1}{P^r} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{P-2}\right)^{r-1} \frac{P-1}{P+1} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^{v-1} v |d_v(N)| \leq \\
&\leq \frac{1}{P^r} \frac{2^{r-1}}{r} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} v |d_v(N)| \leq \frac{2^{r-1} A_1 A_3}{rP^r}. \tag{41}
\end{aligned}$$

Шаг 11. Для нормы одиннадцатой компоненты правой части (30) в силу последовательно левого и правого неравенства (35), посылки (11) и условия (8) имеем оценку ($P > N+1$)

$$\begin{aligned}
\forall N \in Z_2 \left\| \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{(K-1)^r - (K-2)^r} Z_{K-2}^r(2) \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{(K-1)^v - (K-2)^v}{(K+1)^v} d_v(K) \right\|_{\mathbf{B}} &\leq \\
&\leq \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{(K-1)^r}{r(K-2)^{r-1}} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{v(K-1)^{v-1}}{(K+1)^v} |d_v(K)| = \\
&= \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{K-2}\right)^{r-1} \frac{K-1}{K+1} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} \left(\frac{K-1}{K+1}\right)^{v-1} v |d_v(K)| \leq \\
&\leq \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] \frac{2^{r-1}}{r} A_1 \sum_{v=1}^{+\infty} v |d_v(K)| \leq \\
&\leq \frac{2^{r-1}}{r} A_1 A_3 \sum_{K=N+1}^{P-1} \left[\frac{1}{K^r} - \frac{1}{(K+1)^r} \right] = \frac{2^{r-1}}{r} A_1 A_3 \left[\frac{1}{(N+1)^r} - \frac{1}{P^r} \right]. \tag{42}
\end{aligned}$$

Шаг 12. Пятую компоненту правой части (30) разбиваем на две:

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]_{u=n}^{u=n+1} (n+1)^r Z_n^r(2) = \\
&= - \sum_{v=1}^{r-1} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right\}_{u=n}^{u=n+1} (n+1)^r Z_n^r(2) + \\
&\quad + \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]_{u=n}^{u=n+1} (n+1)^r Z_n^r(2). \tag{43}
\end{aligned}$$

По формуле Ньютона—Лейбница

$$\left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} = \int_n^{n+1} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right\}' du. \tag{44}$$

Производная

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right\}' = \\
 & = \left[-\frac{r-v}{u^{r-v+1}} + \frac{r-v}{(u+1)^{r-v+1}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} + \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \cdot \frac{-r[(u+1)^{r-1} - u^{r-1}]}{[(u+1)^r - u^r]^2} = \\
 & = -(r-v) \left[\frac{1}{u^{r-v+1}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v+1}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} - r \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{(u+1)^{r-1} - u^{r-1}}{[(u+1)^r - u^r]^2} < 0.
 \end{aligned}$$

Для модуля предыдущей (отрицательной) производной с помощью оценки сверху (33) и двусторонней оценки (35) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 & \left| \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right\}' \right| \leq (r-v) \frac{r-v+1}{u^{r-v+2}} \frac{1}{ru^{r-1}} + r \frac{r-v}{u^{r-v+1}} \frac{(r-1)(u+1)^{r-2}}{(ru^{r-1})^2} = \\
 & = \frac{(r-v)(r-v+1)}{r} \frac{1}{u^{2r-v+1}} + \frac{(r-v)(r-1)}{r} \frac{(u+1)^{r-2}}{u^{3r-v-1}} = \frac{r-v}{r} \left[\frac{r-v+1}{u^{2r-v+1}} + \left(\frac{u+1}{u} \right)^{r-2} \frac{r-1}{u^{2r-v+1}} \right] = \\
 & = \frac{r-v}{r} \left[\frac{r-v+1}{u^{2r-v+1}} + \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{r-2} \frac{r-1}{u^{2r-v+1}} \right] \leq \frac{r-v}{r} \left(\frac{r-v+1}{u^{2r-v+1}} + 2^{r-2} \frac{r-1}{u^{2r-v+1}} \right) = \\
 & = \frac{(r-v)[r-v+1+2^{r-2}(r-1)]}{ru^{2r-v+1}}. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Из формулы Ньютона—Лейбница (44) с помощью неравенства (45) имеем следующую оценку модуля двойной подстановки:

$$\begin{aligned}
 & \left| \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right|_{u=n}^{u=n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{(r-v)[r-v+1+2^{r-2}(r-1)]}{ru^{2r-v+1}} du \leq \\
 & \leq \frac{(r-v)[r-v+1+2^{r-2}(r-1)]}{rn^{2r-v+1}}. \tag{46}
 \end{aligned}$$

Для нормы первой компоненты правой части (43) в силу условия (9), оценки (46) и посылки (11) получаем оценку

$$\begin{aligned}
 \forall N \in \mathbb{Z}_3 & \left\| - \sum_{v=1}^{r-1} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right\}_{u=n}^{u=n+1} \right\} (n+1)^r Z_n^r(2) \Big\|_{\mathbf{B}} \leq \\
 & \leq \sum_{v=1}^{r-1} \frac{1}{(N+1)^v} \frac{A_4}{(N+1)^{r-v}} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{(r-v)[r-v+1+2^{r-2}(r-1)]}{rn^{2r-v+1}} (n+1)^r A_1 = \\
 & = \frac{A_1 A_4}{r(N+1)^r} \sum_{v=1}^{r-1} (r-v)[r-v+1+2^{r-2}(r-1)] \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n^{r-v+1}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^r \leq \\
 & \leq \frac{2^r A_1 A_4}{r(N+1)^r} \sum_{v=1}^{r-1} (r-v)[r-v+1+2^{r-2}(r-1)] \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n^{r-v+1}}. \tag{47}
 \end{aligned}$$

Оцениваем сверху последнюю сумму в правой части (47):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n^{r-v+1}} = 1 + \sum_{n=2}^{N-2} \frac{1}{n^{r-v+1}} \leq 1 + \int_1^{N-2} \frac{dt}{t^{r-v+1}} = 1 - \frac{1}{r-v} \frac{1}{t^{r-v}} \Big|_1^{N-2} = \\
 & = 1 - \frac{1}{r-v} \left[\frac{1}{(N-2)^{r-v}} - 1 \right] = 1 + \frac{1}{r-v} - \frac{1}{r-v} \frac{1}{(N-2)^{r-v}} \leq \frac{r-v+1}{r-v}. \tag{48}
 \end{aligned}$$

Подстановка неравенства (48) в неравенство (47) приводит к оценке

$$\forall N \in \mathbb{Z}_3 \left\| - \sum_{v=1}^{r-1} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left\{ \left[\frac{1}{u^{r-v}} - \frac{1}{(u+1)^{r-v}} \right] \frac{1}{(u+1)^r - u^r} \right\}_{u=n}^{u=n+1} \right\} (n+1)^r Z_n^r(2) \Big\|_{\mathbf{B}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2^r A_1 A_4}{r(N+1)^r} \sum_{v=1}^{r-1} (r-v) \left[r-v+1+2^{r-2}(r-1) \right] \frac{r-v+1}{r-v} = \\
&= \frac{2^r A_1 A_4}{(N+1)^r} \sum_{v=1}^{r-1} \left[r-v+1+2^{r-2}(r-1) \right] \left(1 - \frac{v-1}{r} \right) \leq \\
&\leq \frac{2^r A_1 A_4}{(N+1)^r} \sum_{v=1}^{r-1} \left[r+2^{r-2}(r-1) \right] = \frac{2^r \left[r+2^{r-2}(r-1) \right] (r-1) A_1 A_4}{(N+1)^r}. \tag{49}
\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему оцениваем сверху норму второй компоненты правой части (43). По формуле Ньютона—Лейбница

$$\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} = \int_n^{n+1} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]' du. \tag{50}$$

Модуль производной

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]' = \\
&= \frac{(v-r) \left[(u+1)^{v-r-1} - u^{v-r-1} \right] \left[(u+1)^r - u^r \right] - \left[(u+1)^{v-r} - u^{v-r} \right] r \left[(u+1)^{r-1} - u^{r-1} \right]}{\left[(u+1)^r - u^r \right]^2}
\end{aligned}$$

оцениваем сверху с помощью двусторонней оценки (35):

$$\begin{aligned}
&\left| \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \right]' \right| \leq \\
&\leq \frac{(v-r)(v-r-1)(u+1)^{v-r-2} r(u+1)^{r-1} + (v-r)(u+1)^{v-r-1} r(r-1)(u+1)^{r-2}}{\left(ru^{r-1} \right)^2} = \\
&= \frac{(v-r)(v-2)(u+1)^{v-3}}{ru^{2r-2}}. \tag{51}
\end{aligned}$$

Из формулы Ньютона—Лейбница (50) с помощью неравенства (51) имеем следующую оценку модуля двойной подстановки:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right| \leq \int_n^{n+1} \frac{(v-r)(v-2)(u+1)^{v-3}}{ru^{2r-2}} du = \\
&= \frac{(v-r)(v-2)}{r} \int_n^{n+1} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{r-1} \frac{(u+1)^{v-r-2}}{u^{r-1}} du \leq \frac{2^{r-1}(v-r)(v-2)}{r} \int_n^{n+1} \frac{(u+1)^{v-r-2}}{u^{r-1}} du \leq \\
&\leq \frac{2^{r-1}(v-r)(v-2)}{r} \int_n^{n+1} \frac{(u+1)^{v-r-2}}{u^{r-1}} \frac{u+1}{u} du = \\
&= \frac{2^{r-1}(v-r)(v-2)}{r} \int_n^{n+1} \frac{(u+1)^{v-r-1}}{u^r} du \leq \frac{2^{r-1}(v-r)(v-2)}{r} \frac{(n+2)^{v-r-1}}{n^r}. \tag{52}
\end{aligned}$$

Норму второй компоненты правой части (43) оцениваем сверху с помощью последовательно неравенства (52), посылки (11) и условия (8):

$$\begin{aligned}
&\forall N \in \mathbb{Z}_3 \left\| \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\
&\leq \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{|d_v(N)|}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{2^{r-1}(v-r)(v-2)}{r} \frac{(n+2)^{v-r-1}}{n^r} (n+1)^r A_1 = \\
&= \frac{2^{r-1} A_1}{r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{(v-r)(v-2)|d_v(N)|}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{v-r-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^r \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{2r-1} A_1}{r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{(v-r)(v-2) |d_v(N)|}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} (n+2)^{v-r-1} \leq \\
&\leq \frac{2^{2r-1} A_1}{r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{(v-r)(v-2) |d_v(N)|}{(N+1)^v} \int_1^{N-1} (t+2)^{v-r-1} dt = \\
&= \frac{2^{2r-1} A_1}{r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{(v-r)(v-2) |d_v(N)|}{(N+1)^v} \frac{(t+2)^{v-r}}{v-r} \Big|_1^{N-1} = \\
&= \frac{2^{2r-1} A_1}{r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} \frac{(v-2) |d_v(N)|}{(N+1)^v} [(N+1)^{v-r} - (1+2)^{v-r}] \leq \\
&\leq \frac{2^{2r-1} A_1}{r(N+1)^r} \sum_{v=r+1}^{+\infty} v |d_v(N)| \leq \frac{2^{2r-1} A_1 A_3}{r(N+1)^r}. \tag{53}
\end{aligned}$$

Из (43), (49) и (53) для нормы пятой компоненты правой части (30) получаем оценку

$$\begin{aligned}
\forall N \in Z_3 \quad &\left\| \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{d_v(N)}{(N+1)^v} \sum_{n=1}^{N-2} \left[\frac{(u+1)^{v-r} - u^{v-r}}{(u+1)^r - u^r} \Big|_{u=n}^{u=n+1} \right] (n+1)^r Z_n^r(2) \right\|_{\mathbf{B}} \leq \\
&\leq \frac{2^r A_1 \{ [r + 2^{r-2}(r-1)](r-1)A_4 + 2^{r-1} r^{-1} A_3 \}}{(N+1)^r}. \tag{54}
\end{aligned}$$

Шаг 13. Тщательно оценивая остальные компоненты правой части (30), мы приходим к выводу, что норма разности Коши

$$\|M_P(\mathbf{1}) - M_N(\mathbf{1})\|_{\mathbf{B}} = O\left(\frac{1}{P^r}\right) + O\left(\frac{1}{N^r}\right), \quad P > N+1 \rightarrow +\infty. \tag{55}$$

Поскольку пространство \mathbf{B} банахово, то из (55) предельным переходом по $P \rightarrow +\infty$ получаем (12). Доказательство теоремы 3 закончено.

Заключение. В данной работе теорема 1 со средних Фейера σ_N и Зигмунда Z_N^r натурального порядка r распространена на матричные средние M_N . Автор надеется распространение теоремы 2 на матричные средние опубликовать в другом месте.

Список цитируемых источников

1. Харди, Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди ; пер. с англ. Д. А. Райкова ; с предисл. и обзор. ст. С. Б. Стечкина. — М. : ИИЛ, 1951. — 504 с. — Пер. изд.: Divergent Series / G. H. Hardy. — Oxford, 1949. — (М. : Комкнига, 2006 ; М. : Факториал Пресс, 2006).
2. Alexits, G. On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory: (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Akadémiai kiadó, 1983. — P. 41—50.
3. Sz. Nagy, B. v. Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen / Béla v. Sz. Nagy // Acta scientiarum mathematicarum (Szeged). — 1946—1948. — Vol. 11. — P. 71—84.
4. Стечкин, С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Серия «Математика». — 1953. — Т. 17, № 5. — С. 461—472.
5. Alexits, G. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér / G. Alexits // Approximation theory: (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Académiai Kiadó, 1983. — P. 59—70.
6. Tian-ping, Chen. Typical means of Fourier series. I / Chen Tian-ping // Chinese Math. — Acta. — 1966. — Vol. 8. — P. 191—204.
7. Králík, D. Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Riesz'schen Mittel von Fourierreihen / D. Králík // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1969. — Vol. 20, № 3—4. — P. 361—373.
8. Бруй, И. Н. О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; Ред. журн. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». — Минск, 1989. — 60 с. — Деп. в ВИНТИ АН СССР 16.08.1989, № 5514-B89.
9. Alexits, G. An elementary method in the constructive theory of functions / G. Alexits // Approximation theory: (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Académiai Kiadó, 1983. — P. 203—207.
10. Alexits, G. Über eine elementare reihentheoretische Methode in der Approximationstheorie / G. Alexits // Approximation theory: (Selected papers) / G. Alexits. — Budapest : Académiai Kiadó, 1983. — P. 278—285.
11. Totik, V. Az approximációelmélet ún elemi módszeréről / V. Totik // Matematikai Lapok. — 1983. — Vol. 31, № 1—3. — P. 175—190.
12. Rogosinski, W. Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen / W. Rogosinski // Mathematische Annalen. — 1926. — 95 Band. — S. 110—134.
13. Бернштейн, С. Н. Об одном методе суммирования тригонометрических рядов / С. Н. Бернштейн // Собр. соч. / С. Н. Бернштейн. — М. : Изд-во АН СССР, 1952. — Т. I : Конструктивная теория функций [1905—1930]. — С. 523—525.