

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БАРАНОВИЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАСЧЁТУ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ  
ЦЕПЕЙ**

**Практическое пособие  
для аудиторной и самостоятельной работы  
студентов инженерных специальностей**

**Барановичи  
РИО БарГУ  
2013**

УДК 537(076)  
ББК 32.88-01я73  
Р47

Рекомендовано к печати методической комиссией  
инженерного факультета

Составитель

*И. В. Дубень*

Рецензенты:

*Д. А. Ционенко*, кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры физики БГАТУ;

*С. И. Козлов*, кандидат технических наук, доцент,  
заведующий кафедрой физики БГСХА;

*К. Л. Пузевич*, старший преподаватель кафедры механизации  
животноводства и электрификации сельскохозяйственного  
производства БГСХА

**Р47** **Решение задач по расчёту электрических и магнитных цепей** [Текст] : практ. рук. для аудитор. и самостоят. работы студентов инженер. специальностей / сост. И. В. Дубень. — Барановичи : РИО БарГУ, 2013. — 134, [2] с. — 140 экз. — ISBN 978-985-498-540-4.

Приведены примеры решения типичных задач по расчёту цепей постоянного и переменного тока, магнитных цепей, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов инженерных специальностей дневной и заочной форм получения образования, изучающих дисциплины «Электротехника, электрические машины и аппараты» и «Электротехника и электроника».

Табл. 62. Рис. 90.

УДК 537(076)  
ББК 32.88-01я73

ISBN 978-985-498-540-4

© Составление. Дубень И. В., 2013  
© БарГУ, 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> .....	4
Перечень условных обозначений и их единиц измерения .....	5
<b>1 РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА</b> .....	<b>6</b>
1.1 Анализ вольт-амперных характеристик в линейных и нелинейных цепях .....	6
1.2 Метод эквивалентных преобразований цепи .....	19
1.3 Метод наложения .....	33
1.4 Метод узлового напряжения .....	41
1.5 Метод непосредственного применения законов Кирхгофа .....	45
1.6 Метод контурных токов .....	54
1.7 Метод эквивалентного генератора .....	59
<b>2 РАСЧЁТ ОДНОФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА</b> .....	<b>64</b>
2.1 Расчёт неразветвлённых однофазных цепей .....	64
2.2 Расчёт разветвлённых однофазных цепей .....	72
2.3 Комплексный метод расчёта однофазных цепей .....	82
<b>3 РАСЧЁТ ТРЁХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА</b> .....	<b>95</b>
3.1 Расчёт четырёхпроводных трёхфазных цепей .....	95
3.2 Расчёт трёхпроводных трёхфазных цепей со схемой «звезда» .....	103
3.3 Расчёт трёхпроводных трёхфазных цепей со схемой «треугольник» ...	108
<b>4 РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА</b> .....	<b>114</b>
<b>5 РАСЧЁТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННОЙ МАГНИТОДВИЖУЩЕЙ СИЛОЙ</b> .....	<b>121</b>
Список рекомендуемых источников .....	132

## *Предисловие*

В пособии представлены теоретические материалы, методические рекомендации для решения задач по первому разделу «Основы теории электрических цепей» дисциплин «Электротехника, электрические машины и аппараты», «Электротехника» и «Электротехника и электроника» студентами инженерных специальностей в ходе практических занятий и самостоятельной работы.

Целью издания является формирование у студентов практических навыков решения задач, углубление и закрепление теоретических знаний, приобретение навыков оформления технической документации и использования электронно-вычислительной техники при проведении технических расчётов.

Методические рекомендации и задачи для самостоятельного решения охватывают все темы раздела «Основы теории электрических цепей», по всем темам каждой из которых имеются рекомендации и примеры решения типовых задач. Каждая задача, предложенная для самостоятельного решения, содержит 10 вариантов, отличающихся схемами электрических цепей, заданными электрическими величинами. Выбор задач и вариантов для каждого студента осуществляется преподавателем.

Перед решением задач студентам рекомендуется ознакомиться с лекционным курсом, а также с соответствующими разделами в рекомендованных литературных источниках.

Расчёт искомых величин необходимо вести сначала в общем виде, а затем в полученные окончательные формулы подставить численные значения величин. Не рекомендуется загромождать расчеты излишними промежуточными вычислениями. При построении графиков и векторных диаграмм необходимо соблюдать общепринятые правила, обязательно указать масштабы (как правило, кратные числам 2, 5, 10), обозначения осей и размерности по ним. Исходные рисунки и схемы следует выполнять карандашом с использованием чертёжных инструментов. Для элементов схем и электрических величин следует пользоваться действующими условными обозначениями.

*И. В. Дубень*

**ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ  
И ИХ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ**

Условное обозначение	Наименование, сокращение	Единица измерения
$\delta$	Длина воздушного зазора в магнитной цепи	м
$\psi$	Начальная фаза переменного тока	град
$\varphi$	Угол сдвига фаз	град
$\omega$	Угловая (круговая) частота переменного тока	Рад / с
$\mu_0$	Электромагнитная постоянная ( $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ )	Гн / м
$\mu_r$	Относительная магнитная проницаемость	—
$B$	Магнитная индукция	Тл
$b$	Реактивная проводимость	См, Ом <sup>-1</sup>
$b_C$	Ёмкостная проводимость	См, Ом <sup>-1</sup>
$b_L$	Индуктивная проводимость	См, Ом <sup>-1</sup>
$C$	Ёмкость	Ф
$\cos \varphi$	Коэффициент мощности	—
$E$	Электродвижущая сила, ЭДС	В
$f$	Частота переменного тока	Гц
$g$	Проводимость (для цепей постоянного тока); активная проводимость (для цепей переменного тока)	См, Ом <sup>-1</sup>
$H$	Напряжённость магнитного поля	А/м
$I$	Сила тока	А
$L$	Индуктивность	Гн
$P$	Мощность (для цепей постоянного тока); активная мощность (для цепей переменного тока)	Вт
$Q$	Реактивная мощность	вар
$R$	Сопротивление элемента (для цепей постоянного тока); активное сопротивление (для цепей переменного тока)	Ом
$R_0$	Внутреннее сопротивление источника	Ом
$R_m$	Магнитное сопротивление участка магнитной цепи	(Ом · м) <sup>-1</sup>
$S$	Полная мощность	В · А
$s$	Площадь поперечного сечения магнитопровода	м <sup>2</sup>
$U$	Напряжение	В
$w$	Число витков катушки	шт.
$X_C$	Ёмкостное сопротивление	Ом
$X_L$	Индуктивное сопротивление	Ом
$y$	Полная проводимость	См, Ом <sup>-1</sup>
$Z$	Полное сопротивление	Ом
$\Phi$	Магнитный поток	Вб
$F$	Сила притяжения электромагнита	Н

# 1 РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

## 1.1 Анализ вольт-амперных характеристик в линейных и нелинейных цепях

Графический метод расчёта цепи на основе построения вольт-амперных характеристик источника и приёмника используется для анализа режима работы источника, который характеризуется величиной ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_0$ , и нагрузочной части цепи с линейными и нелинейными приёмниками (рис. 1.1, *a*). В основе метода лежит построение совмещённой вольт-амперной характеристики источника и приёмника (рис. 1.1, *б*). Напряжение на выводах источника и, соответственно, на зажимах приёмника является вольт-амперной характеристикой источника, определяемой по формуле

$$U(I) = E - IR_0,$$

где  $I$  — сила тока в цепи, А.

Вольт-амперная характеристика источника (см. рис. 1.1, *б*) строится по двум точкам: точке холостого хода с координатами  $(0; U_0)$  и точке короткого замыкания с координатами  $(I_{к.з}; 0)$ .

Вольт-амперная характеристика линейного сопротивления является прямой линией, которая определяет линейную зависимость

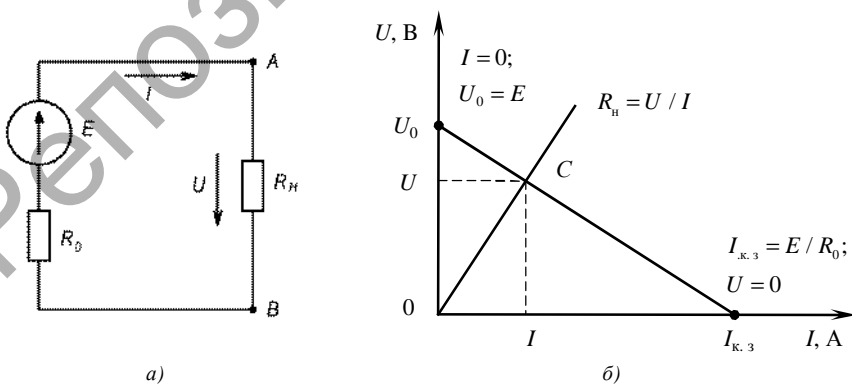


Рисунок 1.1 — Схема простейшей линейной цепи и её вольт-амперная характеристика

между подведённым к приёмнику напряжением и силой тока и выражаются формулой

$$I = U / R_{\text{н}}$$

Пересечение вольт-амперных характеристик источника и приёмника определяет рабочую точку  $C$  (см. рис. 1.1, б), по которой можно найти установившиеся значения напряжения  $U$  и тока  $I$  на приёмнике  $R_{\text{н}}$ .

Вольт-амперная характеристика нелинейного сопротивления задаётся зависимостью  $U(I)$  в виде таблицы или графика (рис. 1.2, б). Для нелинейного элемента в каждой точке вольт-амперной характеристики с координатами  $(I; U)$  можно определить значения статического  $R_{\text{ст}}$  и динамического  $R_{\text{дин}}$  сопротивлений (Ом) по формулам

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I}; R_{\text{дин}} = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

где  $dU$ ,  $dI$ ,  $\Delta U$ ,  $\Delta I$  — изменения напряжения и тока на бесконечно малом и конечном промежутке соответственно вольт-амперной характеристики в окрестностях рабочей точки.

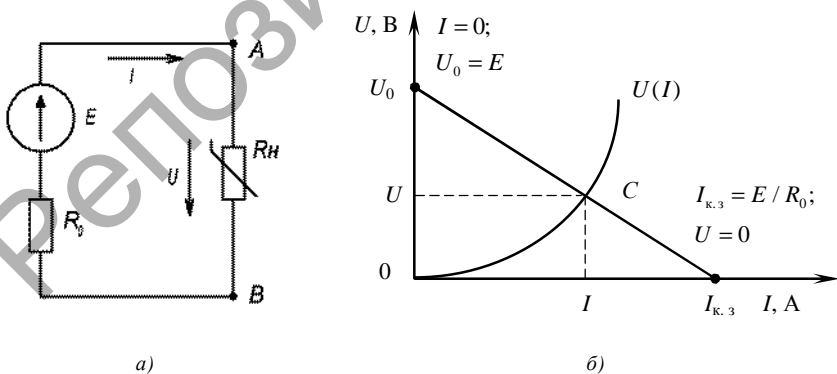


Рисунок 1.2 — Схема простейшей нелинейной цепи и её вольт-амперная характеристика

**Передача максимальной мощности от источника к приёмнику** достигается в режиме согласования сопротивлений, условием которого является равенство сопротивления приёмника сопротивлению остальной части цепи. В простейшем случае (см. рис. 1.1, а)

$$R_{\text{п}} = R_0.$$

Тогда передаваемая приемнику мощность  $P_{\text{max}}$  (Вт) и КПД цепи  $\eta$  (%) равны

$$P_{\text{max}} = \frac{E^2}{4R_0}; \eta = \frac{R_{\text{п}}}{R_{\text{п}} + R_0} \cdot 100\% = 50\% \text{ соответственно.}$$

**При параллельном включении двух источников с одинаковой полярностью** их общая ЭДС (В) определяется по формуле

$$E = \frac{E_1 R_{02} + E_2 R_{01}}{R_{01} + R_{02}},$$

где  $E_1$ ,  $E_2$  и  $R_{01}$ ,  $R_{02}$  — ЭДС и внутреннее сопротивление первого и второго источников соответственно;

Внутреннее сопротивление  $R_0$  (Ом) такого блока питания вычисляется по формуле

$$R_0 = \frac{R_{01} R_{02}}{R_{01} + R_{02}}.$$

Зная величины  $E$  и  $R_0$ , можно определить ток короткого замыкания  $I_{\text{к.з}}$  двух источников с параллельным включением из выражения

$$I_{\text{к.з}} = \frac{E}{R_0} = \frac{E_1 R_{02} + E_2 R_{01}}{R_{01} R_{02}} = \frac{E_1}{R_{01}} + \frac{E_2}{R_{02}} = I_{1\text{к.з}} + I_{2\text{к.з}}.$$

ЭДС  $E$  и внутреннее сопротивление  $R_0$  источника, имеющего  $n$  последовательно включённых элементов питания вычисляется следующим образом:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i;$$

$$R_0 = \sum_{i=1}^n R_{0i}.$$

Ток короткого замыкания  $I_{к.з}$  батареи источников определяется по формуле

$$I_{к.з} = \frac{E}{R_0} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{\sum_{i=1}^n R_{0i}}.$$

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Составить схему замещения цепи с источником ЭДС, внешняя характеристика которого задана на рисунке 1.3. Определить ЭДС источника  $E$ , его внутреннее сопротивление  $R_0$ , сопротивление нагрузки  $R_n$ , КПД цепи  $\eta$  и потери в источнике  $\Delta P$ , если ток  $I$  в цепи  $I = 2$  А. Определить сопротивление приёмника и параметры работы цепи в режиме согласования сопротивлений. Построить совместную вольт-амперную характеристику источника и приёмника для этих режимов.

**Решение.** Схема замещения цепи (рис. 1.4) включает источник ЭДС  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_0$  и сопротивлением нагрузки  $R_n$ . Значение ЭДС источника равно напряжению на его выводах в режиме холостого хода, т. е.

$$E = U_0 = 120 \text{ В.}$$

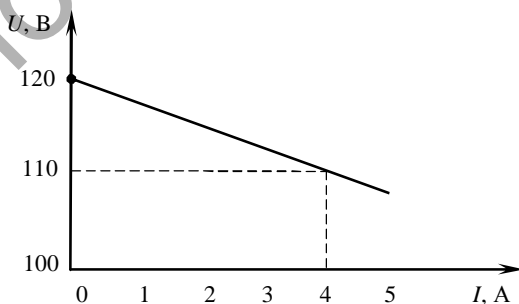


Рисунок 1.3

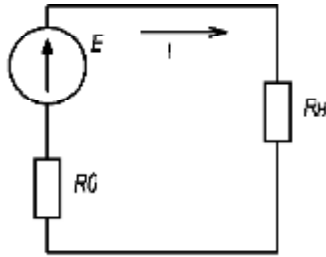


Рисунок 1.4

По графику находим значение напряжения  $U$  при заданном токе нагрузки  $I = 2$  А:

$$U = 115 \text{ В.}$$

В соответствии с уравнением электрического состояния цепи  $U = E - R_0 I$  определяем внутреннее сопротивление  $R_0$  источника по формуле

$$R_0 = (U - E) / I = (120 - 115) / 2 = 2,5 \text{ Ом.}$$

Сопротивление приёмника вычисляем по выражению

$$R_{\text{н}} = U / I = 115 / 2 = 57,5 \text{ Ом.}$$

Коэффициент полезного действия (КПД) цепи определяем следующим образом:

$$\eta = \frac{I^2 R_{\text{н}}}{EI} 100\% = \frac{2^2 \cdot 57,5}{120 \cdot 2} 100\% = 96\%.$$

Мощность источника  $P_{\text{ист}}$  и приёмника  $P_{\text{н}}$  составит

$$P_{\text{ист}} = EI = 120 \cdot 2 = 240 \text{ Вт;}$$

$$P_{\text{н}} = I^2 R_{\text{н}} = 2^2 \cdot 57,5 = 230 \text{ Вт соответственно.}$$

Режиму согласования сопротивлений соответствует сопротивление нагрузки  $R'_n = R_0 = 2,5 \text{ Ом}$ , при этом от источника к приёмнику передается максимальная мощность, равная

$$P'_n = \frac{E^2}{4R'_n} = \frac{120^2}{4 \cdot 2,5} = 1440 \text{ Вт.}$$

Сила тока  $I'$  и мощность  $P'_{\text{ист}}$  источника вычисляется по формулам

$$I' = \frac{E}{R_0 + R'_n} = \frac{120}{2,5 + 2,5} = 24 \text{ А;}$$

$$P'_{\text{ист}} = EI' = 120 \cdot 24 = 2880 \text{ Вт.}$$

КПД цепи в режиме согласования сопротивлений определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{P'_n}{P'_{\text{ист}}} 100\% = \frac{1440}{2880} 100\% = 50\%.$$

Строим вольт-амперные характеристики источника и приёмника (рис. 1.5), определив предварительно значение тока короткого замыкания источника по выражению

$$I_{\text{к.з}} = \frac{E}{R_0} = \frac{120}{2,5} = 48 \text{ А.}$$

**Пример 2.** В цепь постоянного тока (рис. 1.6) последовательно включены линейный элемент  $R_1$  и нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого задана в таблице 1.1. Построить общую вольт-амперную характеристику и графически определить ток в цепи и напряжение на нелинейном сопротивлении  $U_2$  при напряжении питания цепи  $U = 100 \text{ В}$ . Определить статическое и динамическое сопротивления элемента  $R_2$  в рабочей точке, используя исходные данные таблицы 1.1.

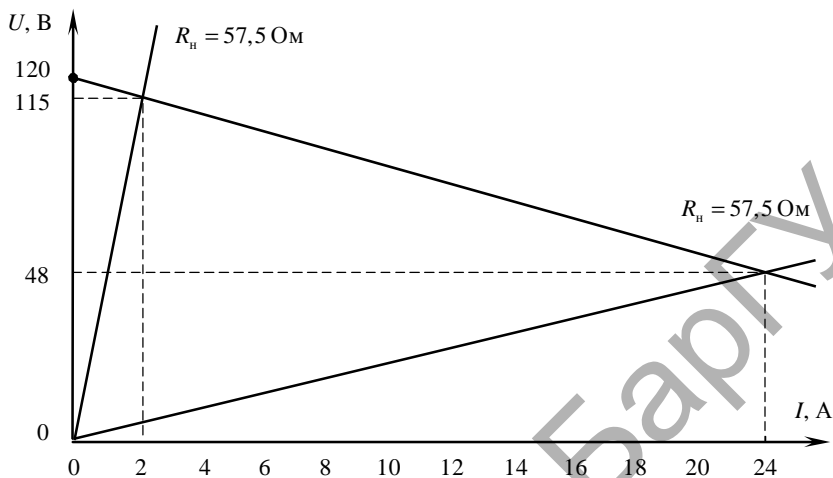


Рисунок 1.5

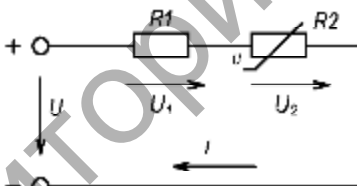


Рисунок 1.6

Т а б л и ц а 1.1

Величина	Значение								
$U_2, \text{В}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$I_2, \text{А}$	0,00	0,05	0,25	0,45	0,75	1,20	1,70	2,40	3,20

**Решение.** Расчёт производим графическим методом. Для этого в системе координат с масштабами  $m_U$  и  $m_I$  строим вольт-амперную характеристику нелинейного элемента  $R_2$  и линейного элемента  $R_1$  (рис. 1.7).

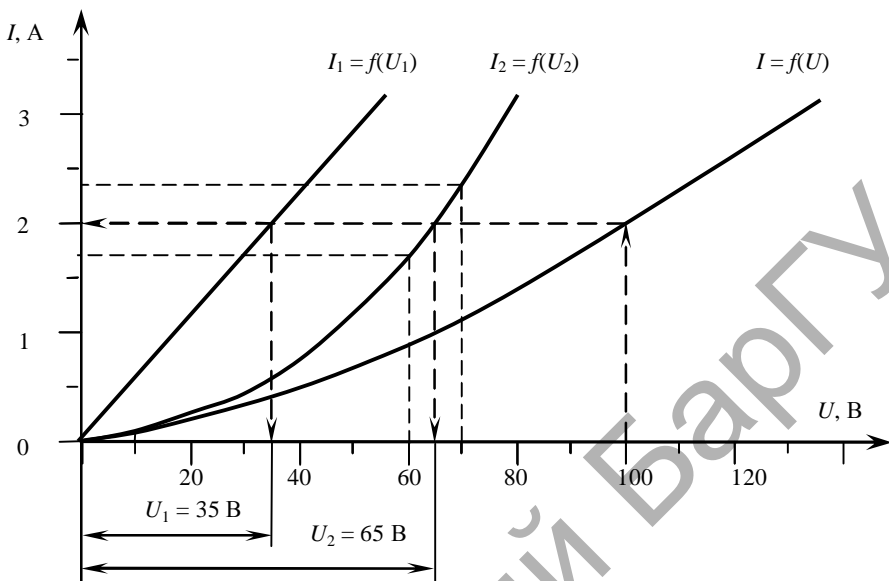


Рисунок 1.7

Путём сложения вольт-амперных характеристик элементов  $R_1$  и  $R_2$  вдоль оси напряжений получаем вольт-амперную характеристику цепи  $I = f(U)$ , по которой определяем напряжения на элементах цепи и ток при входном напряжении  $U = 100$  В.

В результате получим:

$$U_1 = 35 \text{ В};$$

$$U_2 = 65 \text{ В};$$

$$I = 2 \text{ А}.$$

Статическое сопротивление нелинейного элемента в рабочей точке вычислим по формуле

$$R_{\text{ст}} = \frac{U_2}{I} = \frac{65}{2} = 32,5 \text{ Ом}.$$

Динамическое сопротивление нелинейного элемента определим в окрестности рабочей точки с напряжением 60...70 В (см. рис. 1.7) по выражению

$$R_{\text{дин}} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{70 - 60}{2,4 - 1,7} = \frac{10}{0,7} = 14,3 \text{ Ом.}$$

**Пример 3.** Линейный элемент с сопротивлением  $R = 200$  Ом, и нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого задана в таблице 1.2, соединены последовательно и подключены к источнику питания с ЭДС  $E = 200$  В (рис. 1.8). Определить ток в цепи и напряжение на нелинейном элементе, используя исходные данные таблицы 1.2.

**Решение.** Ток в цепи и напряжение на нелинейном элементе определяются, с одной стороны, вольт-амперной характеристикой элемента  $R_2$ , с другой — уравнением по второму закону Кирхгофа для источника и сопротивления  $R_1$  (внешней характеристики активного двухполюсника, включающего элементы  $E$  и  $R_1$ ), по зависимости,

$$U_{AB}(I) = E - IR_1,$$

Т а б л и ц а 1.2

Величина	Значение									
$U$ , В	0	20	40	60	80	100	120	160	200	240
$I$ , А	0,00	0,22	0,36	0,45	0,53	0,60	0,65	0,76	0,80	0,86

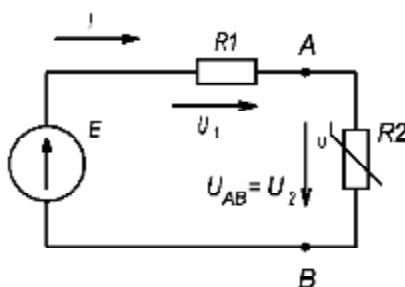


Рисунок 1.8

которую построим по двум точкам: точке холостого хода  $A (0; U_0)$  и точке короткого замыкания  $B (I_{к.з}; 0)$ , где

$$U_0 = E = 200 \text{ В};$$

$$I_{к.з} = \frac{E}{R_1} = \frac{200}{200} = 1 \text{ А}.$$

По совместной вольт-амперной характеристике активного двухполюсника и нелинейного элемента (рис. 1.9) определим напряжение  $U_2 = 85 \text{ В}$ , и силу тока в цепи  $I = 0,55 \text{ А}$ .

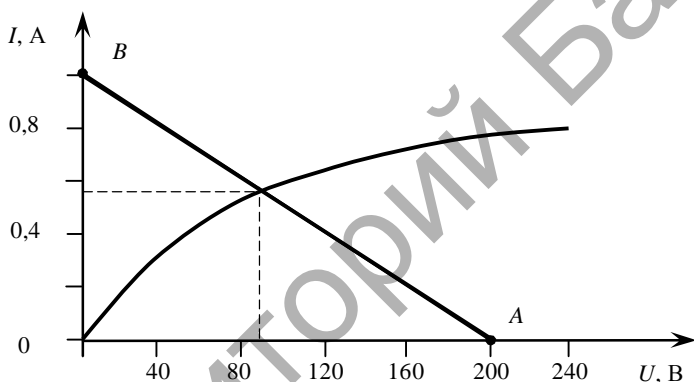


Рисунок 1.9

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.1.** В линейной цепи (рис. 1.10) известны показания вольтметра  $U$  и амперметра  $I$  при замкнутом ключе  $S$ . Если ключ разомкнут, то вольтметр покажет значение напряжения  $U_0$ . Определить сопротивление приёмника  $R_H$ , внутреннее сопротивление источ-

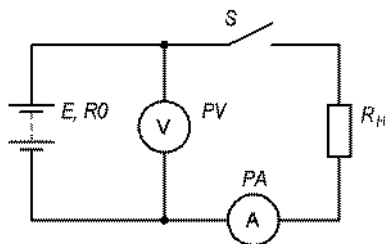


Рисунок 1.10

ника  $R_0$  и КПД цепи  $\eta$  при замкнутом ключе. Вычислить ток короткого замыкания  $I_{к.з}$  источника и построить его вольт-амперную характеристику, используя исходные данные таблицы 1.3.

**Задача 1.2.** К источнику электрической энергии с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_0$  через проводники с сопротивлением  $R_{л}$  подключён приёмник  $R_{п}$ , сопротивление которого можно изменять в указанных пределах. Составить схему замещения цепи. Определить ток цепи  $I$ , напряжение на клеммах приёмника  $U$ , мощность приёмника  $P$ , мощность источника  $P_{ист}$ , падение напряжения на линии  $\Delta U$ , потери мощности  $\Delta P$  и КПД цепи  $\eta$ , используя исходные данные таблицы 1.4.

Т а б л и ц а 1.3

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, В$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$I, А$	0,5	1,0	1,5	2,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$U_0, В$	12	18	23	28	34	39	45	46	56	62

Т а б л и ц а 1.4

Вариант	$E, В$	$R_0, Ом$	$R_{л}, Ом$	$R_{п}, Ом$
1	10	0,5	2	0,5; 1,0; 1,5
2	15	1,0	3	1,0; 1,5; 3,0
3	20	1,5	3	1,5; 3,0; 4,0
4	25	2,0	4	2,0; 4,0; 8,0
5	30	1,5	4	3,0; 6,0; 12,0
6	35	1,0	5	6,0; 9,0; 12,0
7	40	1,5	5	10,0; 15,0; 20,0
8	45	2,0	6	10,0; 20,0; 30,0
9	50	1,5	6	15,0; 30,0; 45,0
10	55	2,5	8	20,0; 40,0; 60,0

**Задача 1.3.** По условиям задачи 1.2 построить совместную вольт-амперную характеристику источника и приёмника. Определить, при каком значении сопротивления приёмника ему будет передаваться максимальная мощность.

**Задача 1.4.** К генератору постоянного тока с ЭДС  $E_T$  и внутренним сопротивлением  $R_T$  с помощью двухжильного провода с общим сопротивлением жил  $R_{л} = 0,2$  Ом, подключён приёмник с сопротивлением  $R_{н}$ . Составить схему цепи. Построить совместную вольт-амперную характеристику генератора и приёмника. Определить ток в цепи и напряжение на приёмнике. Вычислить мощность приёмника, мощность потерь в генераторе и проводах, КПД установки, используя исходные данные таблицы 1.5.

**Задача 1.5.** Приёмник с сопротивлением  $R_{н}$  получает энергию от двух источников питания с ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  и внутренним сопротивлением  $R_{01}$  и  $R_{02}$  соответственно через провод, суммарное сопротивление жил которого  $R_{л} = 0,5$  Ом. Составить схему цепи. Определить напряжение на клеммах приёмника, потребляемую силу тока и мощность, а также токи первого и второго источника, используя исходные данные таблицы 1.6.

**Задача 1.6.** Для нелинейного элемента, вольт-амперная характеристика которого представлена на рисунке 1.11, при заданном значении напряжения  $U$  или тока  $I$  определить статическое  $R_{ст}$  и динамическое  $R_{дин}$  сопротивления, а также выделяемую на элементе тепловую мощность, используя исходные данные таблицы 1.7.

Т а б л и ц а 1.5

Вариант	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E, В$	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
$R_T, Ом$	0,5	1,0	1,5	2,0	1,5	1,0	1,5	2,0	1,5	2,5
$R_{л}, Ом$	2	3	3	4	4	5	5	6	6	8
$R_{н}, Ом$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

Т а б л и ц а 1.6

Вариант	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_1, \text{В}$	10	12	16	18	20	22	24	26	28	30
$R_{01}, \text{Ом}$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,4	0,5	0,8	1,0	1,2	1,4
$E_2, \text{В}$	12	14	16	14	16	18	20	24	22	32
$R_{02}, \text{Ом}$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	0,5	1,0	1,2	1,4	1,6
$R_{\text{н}}, \text{Ом}$	2	4	6	2	4	6	4	6	8	10

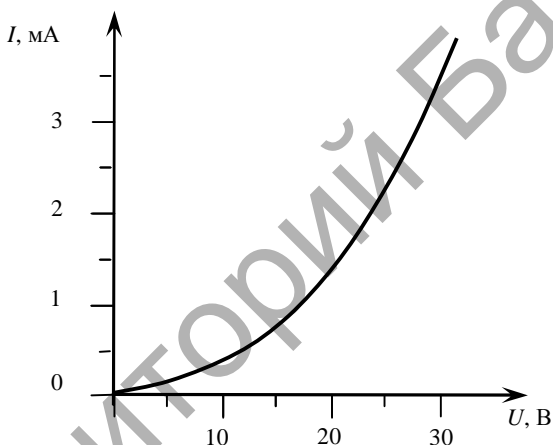


Рисунок 1.11

Т а б л и ц а 1.7

Вариант	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, \text{В}$	10	—	15	—	20	—	25	—	30	—
$I, \text{мА}$	—	1,0	—	1,5	—	2,0	—	2,5	—	3,0

**Задача 1.7.** Коллекторная цепь транзисторного усилителя, собранного на биполярном транзисторе  $VT$ , содержит источник ЭДС  $E_k$  и резистор  $R_k$  (рис. 1.12). При известной выходной характеристике

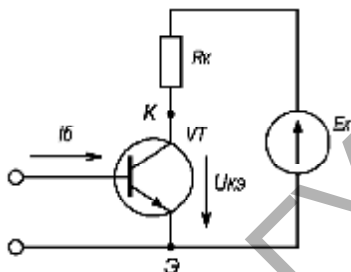
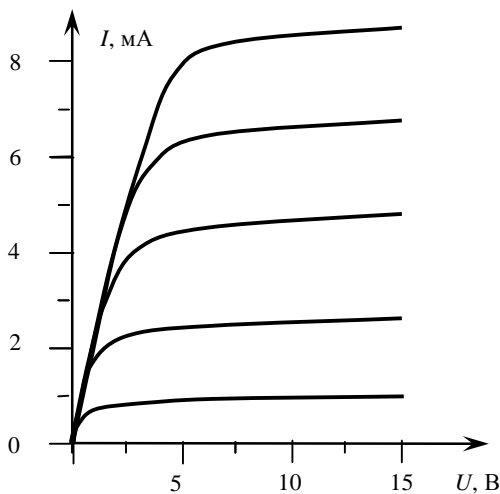


Рисунок 1.12

транзистора  $U_k(I_k)$ , снятой при  $I_б = \text{const}$ , определить диапазон изменения тока коллектора  $I_k$  при изменении тока базы в интервале  $0 \leq I_б \leq 800 \text{ мА}$ .

## 1.2 Метод эквивалентных преобразований цепи

Свертывание участка цепи наиболее часто применяется при решении самых разных задач по расчёту цепей не только постоянного, но и однофазного или трёхфазного переменного тока, что позволяет максимально упростить расчётную схему:

- в цепи с одним источником энергии — путём преобразования всей пассивной части цепи в одно эквивалентное сопротивление;
- в цепи с несколькими источниками — путём преобразования части цепи (одной или нескольких ветвей) в одно эквивалентное сопротивление.

В основе метода лежит замена последовательно включённых сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  на эквивалентное сопротивление  $R_{12}$  (рис. 1.13, а) по формуле

$$R_{12} = R_1 + R_2$$

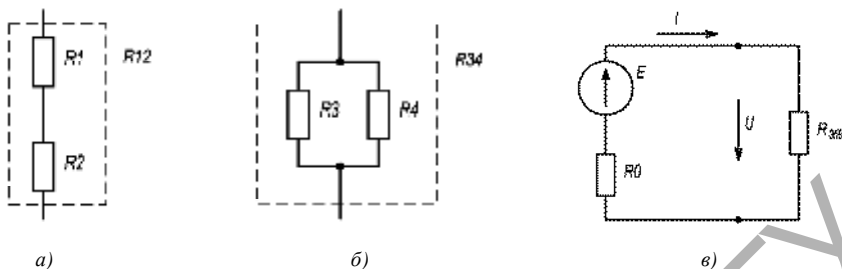


Рисунок 1.13

и параллельно включенных сопротивлений  $R_3$  и  $R_4$  — на эквивалентное сопротивление  $R_{34}$  (см. рис. 1.13, б) по формуле

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Путём последовательных преобразований «из конца в начало» выполняется преобразование расчётной схемы к простейшему виду (см. рис. 1.13, в) с определением значения эквивалентного сопротивления внешней части цепи  $R_{\text{экв}}$ . Затем определяется ток  $I$ , напряжение  $U$  или ЭДС  $E$  источника по формулам

$$I = \frac{E}{R_{\text{экв}} + R_0};$$

$$U = \frac{E - IR_0}{R_{\text{экв}}};$$

$$E = I(R_{\text{экв}} + R_0).$$

Определение напряжений и токов в ветвях внешней части цепи производится в порядке «из начала в конец» с использованием первого и второго законов Кирхгофа, а также законов Ома для участка цепи и контура.

В методе эквивалентных преобразований используется также преобразование пассивного треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду или наоборот — преобразование пассивной звезды сопротивлений в эквивалентный ему треугольник. Это позволяет уменьшить количество контуров в расчётной схеме цепи и использовать более простые методы расчёта для последующего определения неизвестных величин.

Для цепи, содержащей пассивный треугольник сопротивлений  $abc$  (рис. 1.14, *a*), значения сопротивлений эквивалентной звезды  $R_a$ ,  $R_b$  и  $R_c$  (см. рис. 1.14, *б*) определяются согласно следующему правилу: сопротивление луча эквивалентной звезды равно произведению сопротивлений сторон треугольника, прилегающих к этому лучу, делённому на сумму сопротивлений всех сторон треугольника, т. е.

$$R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_c = \frac{R_{bc} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

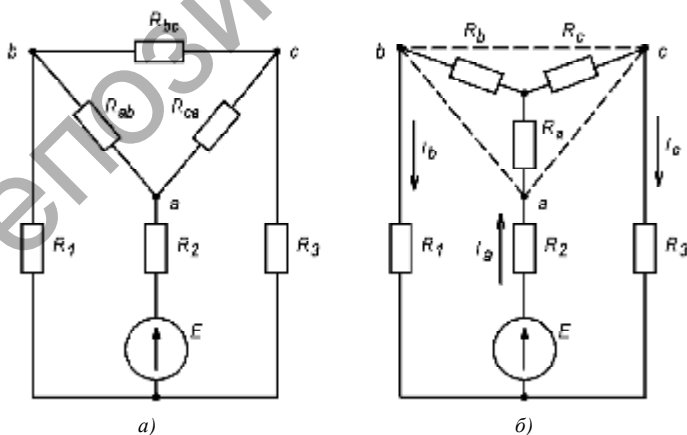


Рисунок 1.14

Обратное преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник сопротивлений производится по формулам

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c};$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a};$$

$$R_{ca} = R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}.$$

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Для цепи (рис. 1.15) заданы:  $E = 100$  В;  $R_0 = 0,5$  Ом;  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = 2$  Ом;  $R_3 = 3$  Ом;  $R_4 = 4$  Ом;  $R_5 = 5$  Ом;  $R_6 = 6$  Ом;  $R_7 = 7$  Ом. Определить токи всех ветвей, напряжения на всех элементах цепи. Проверить правильность решения задачи по уравнению баланса мощности. Построить потенциальную диаграмму контура  $ABC$ .

Определим эквивалентное сопротивление ветви с резисторами  $R_5$ ,  $R_6$  и  $R_7$  по формуле

$$R_{5...7} = R_5 + R_6 + R_7 = 5 + 6 + 7 = 18 \text{ Ом.}$$

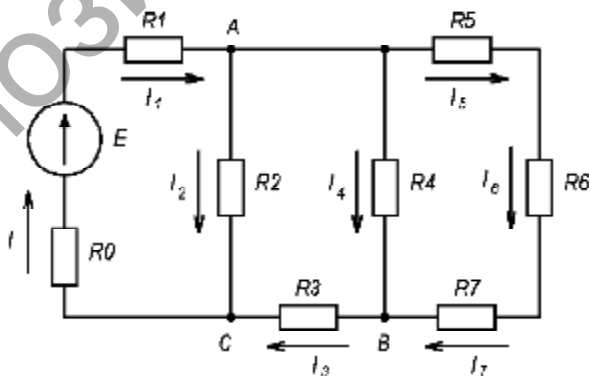


Рисунок 1.15

Эквивалентное сопротивление участка с резисторами  $R_4...R_7$  вычислим следующим образом:

$$R_{4...7} = R_4 \cdot R_{5...7} / (R_4 + R_{5...7}) = 4 \cdot 18 / (4 + 18) = 3,27 \text{ Ом.}$$

Эквивалентное сопротивление участка цепи с резисторами  $R_3...R_7$  определим из выражения

$$R_{3...7} = R_3 + R_{4...7} = 3 + 3,27 = 6,27 \text{ Ом;}$$

эквивалентное сопротивление участка цепи с резисторами  $R_2...R_7$  —

$$R_{2...7} = R_2 \cdot R_{3...7} / (R_2 + R_{3...7}) = (2 \cdot 6,27) / (2 + 6,27) = 1,52 \text{ Ом;}$$

эквивалентное сопротивление внешнего участка цепи —

$$R_{\text{эKB}} = R_l + R_{2...7} = 1 + 1,52 = 2,52 \text{ Ом;}$$

ток источника равен току на резисторе  $R_1$  —

$$I = I_1 = E / (R_0 + R_{\text{эKB}}) = 100 / (0,5 + 2,52) = 33,1 \text{ A;}$$

напряжение на внешнем участке цепи (на клеммах источника) —

$$U = E - IR_0 = 100 - 33,1 \cdot 0,5 = 83,4 \text{ В;}$$

падение напряжения на резисторе  $R_1$  —

$$U_1 = I_1 R_1 = 33,1 \cdot 1 = 33,1 \text{ В;}$$

напряжение между узлами  $A$  и  $C$  —

$$U_{AC} = U - U_1 = 83,4 - 33,1 = 50,3 \text{ В;}$$

сила тока в ветви с резистором  $R_2$  —

$$I_2 = U_{AC} / R_2 = 50,3 / 2 = 25,15 \text{ A;}$$

сила тока  $I_3$  и падение напряжения  $U_3$  на резисторе  $R_3$  —

$$I_3 = U_{AC} / R_{3-7} = 50,3 / 6,27 = 8 \text{ A;}$$

$$U_3 = U_{BC} = I_3 R_3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ В.}$$

Напряжение между узлами  $A$  и  $B$  определим по второму закону Кирхгофа для контура  $ABC$ :

$$U_{AB} = U_{AC} - U_{BC} = 50,3 - 24 = 26,3 \text{ В.}$$

Сила тока в ветви с резистором  $R_4$  составит

$$I_4 = U_{AB} / R_4 = 26,3 / 4 = 6,6 \text{ А;}$$

сила тока в ветви с резисторами  $R_5$ ,  $R_6$  и  $R_7$  —

$$I_5 = I_6 = I_7 = U_{AB} / R_{5-7} = 26,3 / 18 = 1,46 \text{ А;}$$

падения напряжения на резисторах  $R_5$ ,  $R_6$  и  $R_7$  —

$$U_5 = I_5 R_5 = 1,46 \cdot 5 = 7,3 \text{ В;}$$

$$U_6 = I_6 R_6 = 1,46 \cdot 6 = 8,8 \text{ В;}$$

$$U_7 = I_7 R_7 = 1,46 \cdot 7 = 10,2 \text{ В.}$$

Уравнение баланса мощности для цепи будет иметь вид

$$EI = I^2 R_0 + I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7;$$

$$100 \cdot 33,1 = 33,1^2 \cdot 0,5 + 33,1^2 \cdot 1 + 25,15^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 3 + 6,6^2 \cdot 4 + 1,46^2 (5 + 6 + 7);$$

$$3310 \approx 1643,415 + 1265,045 + 192 + 174,2 + 38,4 = 3313.$$

С учётом погрешности вычислений можно считать, что расчёт выполнен верно.

Коэффициент полезного действия цепи составит

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7}{EI} = \\ &= \frac{33,1^2 \cdot 1 + 25,15^2 \cdot 2 + 8^2 \cdot 3 + 6,6^2 \cdot 4 + 1,46^2 (5 + 6 + 7)}{100 \cdot 33,1} = \frac{2214,4}{3310} = 0,67. \end{aligned}$$

Для построения потенциальной диаграммы предварительно определяем потенциалы узлов контура. Принимаем  $\varphi_C = 0$ , тогда

$$\varphi_A = \varphi_C + I_2 R_2 = U_{AC} = 50,3 \text{ В};$$

$$\varphi_B = \varphi_A - I_4 R_4 = \varphi_A - U_{AB} = 50,3 - 26,3 = 24 \text{ В};$$

$$\varphi'_C = \varphi_B - I_3 R_3 = \varphi_B - U_{BC} = 24 - 24 = 0.$$

Принимаем масштаб построения диаграммы  $m_R$  для оси сопротивлений,  $m_U$  для оси потенциалов и строим потенциальную диаграмму (рис. 1.16).

**Пример 2.** Определить токи во всех ветвях цепи (рис. 1.17, а) при следующих исходных данных:  $E = 2,2 \text{ В}$ ;  $R_0 = 0$ ;  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 60 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 22 \text{ Ом}$ .

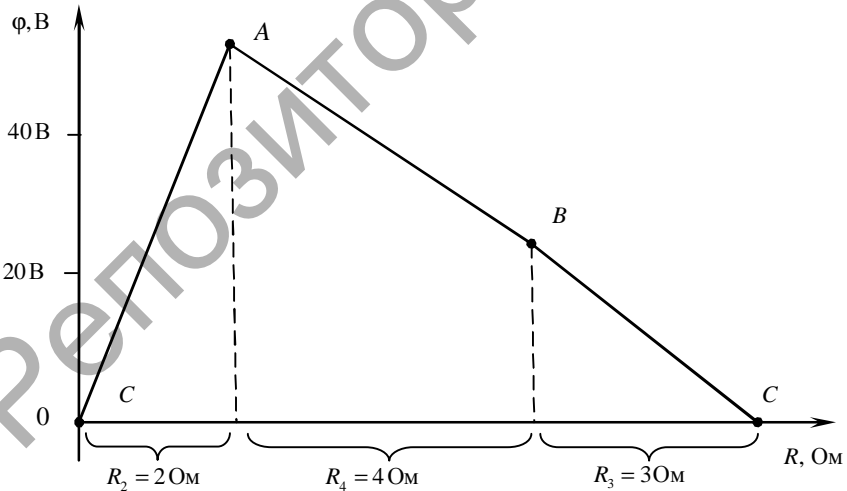


Рисунок 1.16

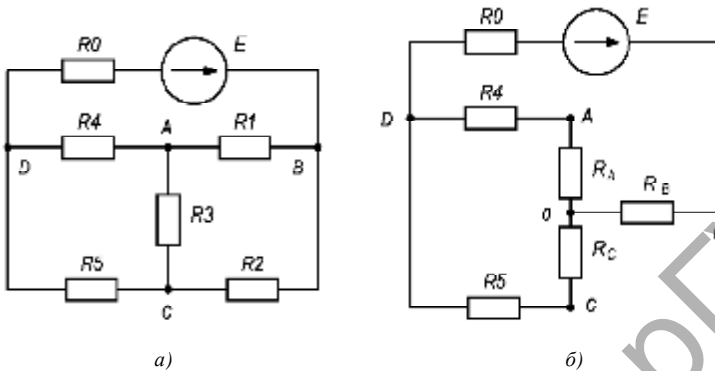


Рисунок 1.17

**Решение.** Заменяем треугольник сопротивлений, подключённых к точкам  $A$ ,  $B$  и  $C$ , эквивалентной звездой из сопротивлений  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$ , подключённой к тем же точкам (см. рис. 1.17, б):

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 6 \text{ Ом};$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 30}{10 + 30 + 60} = 3 \text{ Ом};$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 18 \text{ Ом}.$$

Дальнейший расчёт цепи производим методом свёртывания. Сопротивления ветвей составляет

$$R_{A4} = R_A + R_4 = 6 + 4 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{C5} = R_C + R_5 = 18 + 22 = 40 \text{ Ом};$$

общее сопротивление участка  $BD$  цепи —

$$R_{BD} = \frac{R_{A4} R_{C5}}{R_{A4} + R_{C5}} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \text{ Ом};$$

эквивалентное сопротивление всей цепи —

$$R_{\text{экв}} = R_B + R_0 + R_{BD} = 3 + 0 + 8 = 11 \text{ Ом.}$$

Определим токи  $I$ ,  $I_4$  и  $I_5$ , которые в эквивалентной схеме имеют такие же значения, как и в исходной схеме. Ток в неразветвлённой части цепи, равный току источника, составит

$$I = E / R_{\text{экв}} = 2,2 / 11 = 0,2 \text{ А;}$$

напряжение на разветвлённом участке (на сопротивлении  $R_{BD}$ ) —

$$U_{BD} = I R_{BD} = 0,2 \cdot 8 = 1,6 \text{ В}$$

или

$$U_{BD} = E - I_0 (R_B + R_0) = 2,2 - 0,2 \cdot 3 = 1,6 \text{ В;}$$

значения токов в резисторах  $R_4$  и  $R_5$  —

$$I_4 = U_{BD} / R_{A4} = 1,6 / 10 = 0,16 \text{ А;}$$

$$I_5 = U_{BD} / R_{C5} = 1,6 / 40 = 0,04 \text{ А.}$$

Для определения тока  $I_3$  в исходной схеме для контура  $ACD$  (см. рис. 1.17, а) составляем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0,$$

откуда

$$I_3 = (I_4 R_4 - I_5 R_5) / R_3 = (0,16 \cdot 4 - 0,04 \cdot 22) / 60 = -0,004 \text{ А.}$$

Знак «минус» перед значением тока показывает, что ток  $I_3$  направлен против первоначально выбранного направления, т. е. от точки  $C$  к точке  $A$ . Тогда, воспользовавшись первым законом Кирхгофа для узловых точек  $A$  и  $C$ , определяем искомые токи  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = I_4 + I_3 = 0,16 - 0,004 = 0,156 \text{ А;}$$

$$I_2 = I_5 - I_3 = 0,04 + 0,004 = 0,044 \text{ А.}$$

Проверку выполним по первому закону Кирхгофа для узла  $B$ :

$$I_1 + I_2 = 0,156 + 0,044 = 0,2 \text{ A} = I.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.8.** Определить ЭДС источника, токи в ветвях цепи (рис. 1.18), мощность на резисторах, КПД цепи. Составить уравнение баланса мощности. Определить напряжение на участке  $AB$ , используя исходные данные таблицы 1.8.

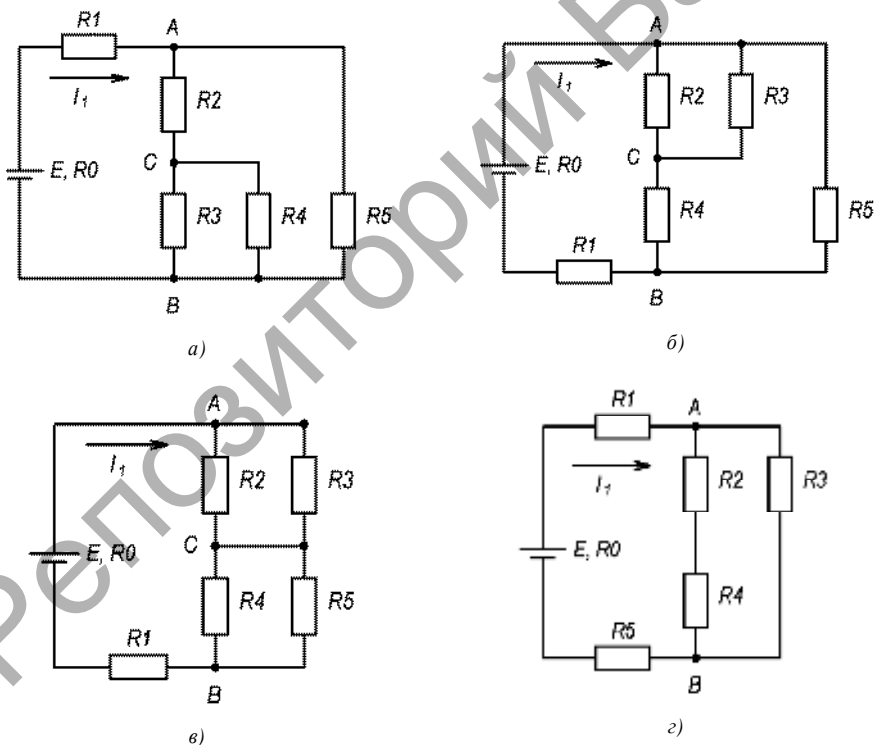


Рисунок 1.18

Т а б л и ц а 1.8

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	в	г	а	б	в	г	а	в
$I, A$	1		2		3		4		5	
$R_0, \text{Ом}$	0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
$R_1, \text{Ом}$	2		3		3		4		4	
$R_2, \text{Ом}$	5		4		5		2		4	
$R_3, \text{Ом}$	3		2		3		4		2	
$R_4, \text{Ом}$	3		4		2		6		5	
$R_5, \text{Ом}$	5		4		3		2		1	

**Задача 1.9.** Для цепи постоянного тока (рис. 1.19) определить её эквивалентное сопротивление, вычислить значения токов и напряжений для источника и всех резисторов, используя данные таблицы 1.9.

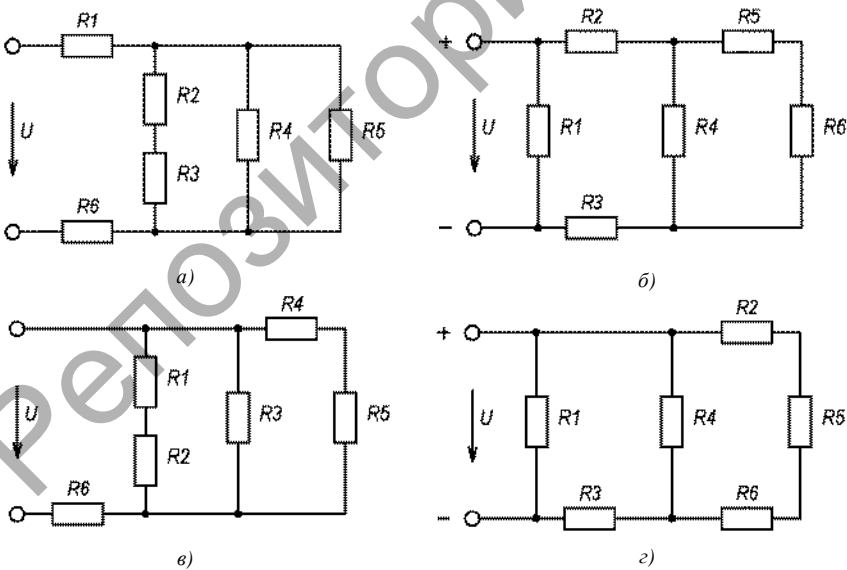


Рисунок 1.19

Т а б л и ц а 1.9

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	в	г	а	б	в	г	а	в
$R_1, \text{ Ом}$	3		4		5		6		7	
$R_2, \text{ Ом}$	4		5		6		7		8	
$R_3, \text{ Ом}$	5		6		7		8		9	
$R_4, \text{ Ом}$	6		7		8		9		3	
$R_5, \text{ Ом}$	3		4		5		6		7	
$R_6, \text{ Ом}$	4		5		6		7		8	
$I_1, \text{ А}$	1		—		—		—		—	
$I_2, \text{ А}$	—		2		—		—		—	
$I_3, \text{ А}$	—		—		2		—		—	
$I_4, \text{ А}$	—		—		—		3		—	
$I_5, \text{ А}$	—		—		—		—		4	

**Задача 1.10.** Для цепи постоянного тока (рис. 1.20) определить ЭДС, ток и напряжение на выводах источника, силу тока во всех ветвях цепи. Составить уравнение баланса мощности, используя исходные данные таблицы 1.10.

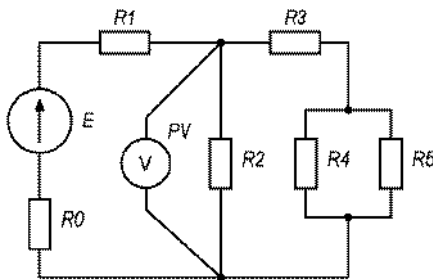


Рисунок 1.20

Т а б л и ц а 1.10

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_2$ , В	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15
$R_0$ , Ом	2	2	3	3	1	1	4	4	3	3
$R_1$ , Ом	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$R_2$ , Ом	60	50	40	30	20	30	40	50	60	30
$R_3$ , Ом	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$R_4$ , Ом	120	100	80	60	40	50	70	90	60	50
$R_5$ , Ом	40	50	60	70	80	90	80	70	30	20

**Задача 1.11.** Определить силу тока и мощность источника в цепи с уравновешенной мостовой схемой (рис. 1.21), используя исходные данные таблицы 1.11.

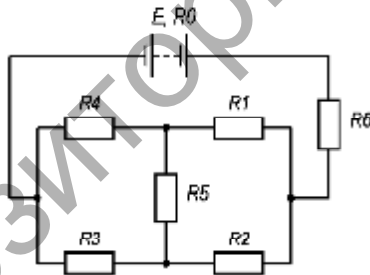


Рисунок 1.21

Т а б л и ц а 1.11

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$I$ , А	22	11	33	44	55	33	44	22	55	33
$R_1$ , Ом	10	15	20	—	10	15	20	—	20	25

Окончание табл. 1.11

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_2$ , Ом	30	30	—	40	50	50	—	60	70	—
$R_3$ , Ом	60	—	50	30	30	—	45	55	45	35
$R_4$ , Ом	—	50	40	15	—	35	60	15	—	70
$R_6$ , Ом	22	33	44	22	33	44	55	40	60	50
$R_0$ , Ом	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5

*Примечание.* Мостовая схема соединения сопротивлений (см. рис. 1.21) является уравновешенной, если ток в диагонали моста  $I_5 = 0$ , для чего необходимо выполнение условия  $R_1 R_3 = R_2 R_4$ .

**Задача 1.12.** Определить силу тока источника, а также ток на указанном резисторе мостовой схемы (рис. 1.22), используя исходные данные таблицы 1.12.

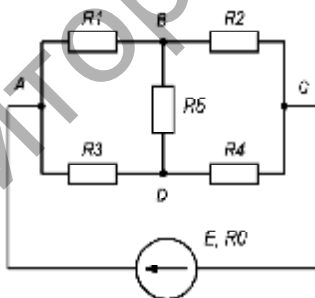


Рисунок 1.22

Т а б л и ц а 1.12

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E$ , В	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$R_0$ , Ом	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Окончание табл. 1.12

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_1$ , Ом	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$R_2$ , Ом	60	50	40	30	20	30	40	50	60	30
$R_3$ , Ом	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$R_4$ , Ом	70	20	80	60	40	50	70	60	40	70
$R_5$ , Ом	40	50	60	70	80	60	70	50	80	40
Определить силу тока на резисторе	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$

### 1.3 Метод наложения

Метод основан на принципе суперпозиции, который предполагает независимое действие токов, обусловленных разными источниками. Применяется для расчёта цепей с двумя и более источниками энергии.

Преимущества метода — простота и наглядность. К недостаткам следует отнести значительное увеличение объема расчетов при большом количестве источников, а также требование повышенной точности при определении численных значений величин.

#### Пример решения задачи

Вычислить токи во всех ветвях сложной цепи (рис. 1.23), указать их направления на схеме. Проверить расчёт балансом мощностей. Использовать метод наложения. Исходные данные:  $E_1 = 50$  В;  $E_2 = 70$  В;  $R_1 = 16$  Ом;  $R_2 = 20$  Ом;  $R_3 = 6$  Ом;  $R_4 = 40$  Ом;  $R_5 = 60$  Ом;  $r_{01} = 2$  Ом;  $r_{02} = 2$  Ом.

Так как количество источников в цепи равно двум, то задачу решим в три этапа.

1. Определим токи на участках цепи при  $E_2$  равной нулю (рис. 1.24, обозначения величин — со штрихом). Предварительно определим сопротивления участков цепи:

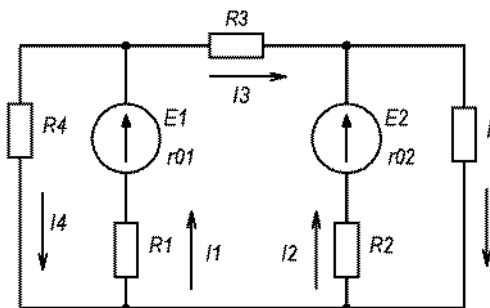


Рисунок 1.23

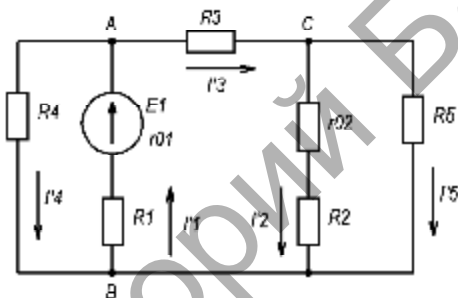


Рисунок 1.24

сопротивление участка с резисторами  $R_2$ ,  $R_5$  и  $r_{02}$  —

$$R_{25} = \frac{(R_2 + r_{02})R_5}{(R_2 + r_{02}) + R_5} = \frac{(20 + 2)60}{(20 + 2) + 60} = \frac{1320}{82} = 16,1 \text{ Ом};$$

сопротивление участка с резисторами  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_5$  и  $r_{02}$  —

$$R_{235} = R_{25} + R_3 = 16,1 + 6 = 22,1 \text{ Ом};$$

сопротивление участка с резисторами  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  и  $r_{02}$  —

$$R_{2345} = \frac{R_{235} \cdot R_4}{R_{235} + R_4} = \frac{22,1 \cdot 40}{22,1 + 40} = \frac{884}{62,1} = 14,2 \text{ Ом};$$

эквивалентное сопротивление цепи относительно источника  $E_1$  —

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_{2345} + R_1 + r_{01} = 14,2 + 16 + 2 = 32,2 \text{ Ом};$$

сила тока в первой ветви —

$$I_1 = E_1 / R_{\text{ЭКВ}} = 50 / 32,2 = 1,55 \text{ А};$$

напряжение между узлами  $A$  и  $B$  —

$$U_{\text{АВ}} = E_1 - I_1 (R_1 + r_{01}) = 50 - 1,55 (16 + 2) = 22,1 \text{ В};$$

ток в четвёртой ветви —

$$I_4 = U_{\text{АВ}} / R_4 = 22,1 / 40 = 0,55 \text{ А};$$

ток в третьей ветви —

$$I_3 = U_{\text{АВ}} / R_{235} = 22,1 / 22,1 = 1 \text{ А};$$

напряжение между узлами  $C$  и  $B$  —

$$U_{\text{СВ}} = U_{\text{АВ}} - I_3 R_3 = 22,1 - 16 = 16,1 \text{ В};$$

токи в ветвях с резисторами  $R_2$  и  $R_5$  —

$$I_2 = U_{\text{СВ}} / (R_2 + r_{02}) = 16,1 / (20 + 2) = 0,73 \text{ А};$$

$$I_5 = U_{\text{СВ}} / R_5 = 16,1 / 60 = 0,27 \text{ А}.$$

2. Определим токи на участках цепи при  $E_1$ , равной нулю (рис. 1.25, обозначения величин — с двумя штрихами).

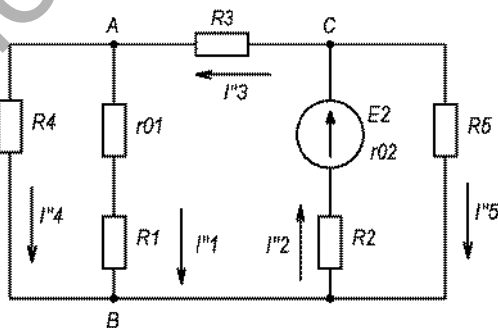


Рисунок 1.25

Предварительно определим сопротивления участков цепи:  
сопротивление участка цепи с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_4$  и  $r_{01}$  —

$$R_{14} = \frac{(R_1 + r_{01})R_4}{(R_1 + r_{01}) + R_4} = \frac{(16 + 2)40}{(16 + 2) + 40} = \frac{720}{52} = 13,85 \text{ Ом};$$

сопротивление участка цепи с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  и  $r_{01}$  —

$$R_{134} = R_{14} + R_3 = 13,85 + 6 = 19,85 \text{ Ом};$$

сопротивление участка цепи с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  и  $r_{01}$  —

$$R_{1345} = \frac{R_{134} \cdot R_5}{R_{134} + R_5} = \frac{19,85 \cdot 60}{19,85 + 60} = \frac{1191}{79,85} = 14,9 \text{ Ом};$$

эквивалентное сопротивление цепи относительно источника  $E_2$  —

$$R''_{\text{ЭКВ}} = R_{1345} + R_2 + r_{02} = 14,9 + 20 + 2 = 36,9 \text{ В};$$

ток источника  $E_2$  —

$$I''_2 = \frac{E_2}{R''_{\text{ЭКВ}}} = \frac{70}{36,9} = 1,9 \text{ А};$$

напряжение между узлами  $C$  и  $B$  —

$$U''_{CB} = E_2 - I''_2(R_2 + r_{02}) = 70 - 1,9(20 + 2) = 28,2 \text{ В};$$

сила тока на сопротивлении  $R_5$  —

$$I''_5 = \frac{U''_{CB}}{R_5} = \frac{28,2}{60} = 0,47 \text{ А};$$

сила тока на сопротивлении  $R_3$  —

$$I''_3 = \frac{U''_{CB}}{R_{134}} = \frac{28,2}{19,85} = 1,42 \text{ А};$$

напряжение между узлами  $A$  и  $B$  —

$$U''_{AB} = U''_{CB} - I''_3 R_3 = 28,2 - 1,42 \cdot 6 = 19,68 \text{ В};$$

сила тока в ветвях с сопротивлениями  $R_4$ ,  $R_1$  и  $r_{01}$  —

$$I''_4 = U''_{AB} / R_4 = 19,68 / 40 = 0,49 \text{ А};$$

$$I''_1 = U''_{AB} / (R_1 + r_{01}) = 19,68 / (16 + 2) = 1,09 \text{ А}.$$

3. Используя принцип суперпозиции, определим действительные токи в ветвях цепи:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 1,55 - 1,09 = 0,46 \text{ А};$$

$$I_2 = -I'_2 + I''_2 = -0,73 + 1,9 = 1,17 \text{ А};$$

$$I_3 = I'_3 - I''_3 = 1 - 1,42 = -0,42 \text{ А};$$

$$I_4 = I'_4 + I''_4 = 0,55 + 0,49 = 1,04 \text{ А};$$

$$I_5 = I'_5 + I''_5 = 0,27 + 0,47 = 0,74 \text{ А}.$$

Для проверки правильности расчёта составим уравнение баланса мощности

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = I_1^2 (R_1 + r_{01}) + I_2^2 (R_2 + r_{02}) + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5;$$

$$50 \cdot 0,46 + 70 \cdot 1,17 = 0,46^2 \cdot (16 + 2) + 1,17^2 \cdot (20 + 2) + (-0,42)^2 \cdot 6 + 1,04^2 \cdot 40 + 0,74^2 \cdot 60;$$

$$104,9 = 104,8.$$

Погрешность обусловлена округлением расчётных значений величин при вычислениях.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.13.** Указать направления токов на схеме (рис. 1.26). Вычислить токи во всех ветвях цепи. Проверить расчёт по уравнению баланса мощности. Составить потенциальную диаграмму для наружного контура цепи, используя данные таблицы 1.13.

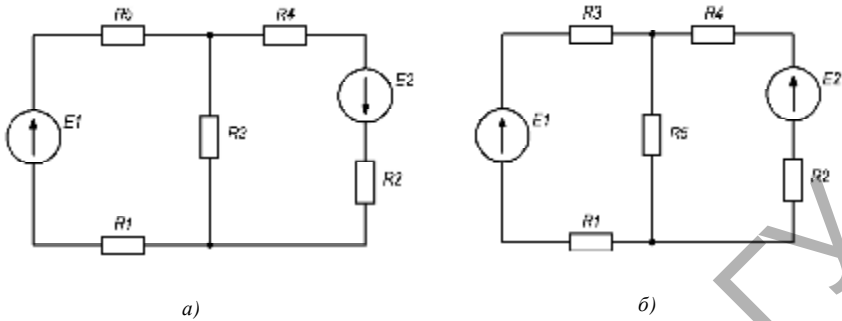
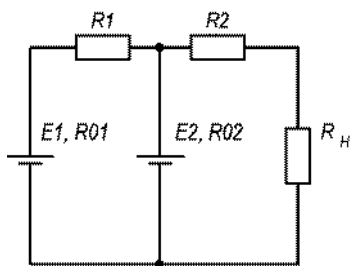


Рисунок 1.26

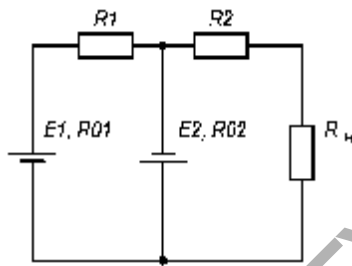
Т а б л и ц а 1.13

Вариант	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{В}$	10	20	30	40	50	60	50	40	30	20
$R_{01}, \text{Ом}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	1,5	1,0	2,0	0,5	0
$E_2, \text{В}$	50	40	30	20	10	20	30	40	50	30
$R_{02}, \text{Ом}$	0,2	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
$R_1, \text{Ом}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R_2, \text{Ом}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
$R_3, \text{Ом}$	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16
$R_4, \text{Ом}$	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18
$R_5, \text{Ом}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

**Задача 1.14.** Вычислить токи во всех ветвях цепи (рис. 1.27). Определить изменение тока и мощности приёмника  $R_H$ , а также КПД цепи при увеличении внутреннего сопротивления  $R_{02}$  источника  $E_2$  в три раза, используя исходные данные таблицы 1.14.



а)



б)

Рисунок 1.27

Т а б л и ц а 1.14

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{В}$	10	20	30	40	50	60	50	40	30	20
$E_2, \text{В}$	9	18	25	32	45	1,5	1,0	2,0	0,5	0
$R_{01}, \text{Ом}$	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	20	30	40	50	30
$R_{02}, \text{Ом}$	0,5	0,6	0,8	1,5	2,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
$R_1, \text{Ом}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R_2, \text{Ом}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
$R_{\text{н}}, \text{Ом}$	15	20	25	30	40	10	11	12	14	16

**Задача 1.15.** Вычислить токи в ветвях цепи (рис. 1.28) методом наложения. Проверить расчёт по уравнению баланса мощности. Построить потенциальную диаграмму для контура  $ACD$ , определить напряжение между узлами  $C$  и  $D$ , используя исходные данные из таблицы 1.15.

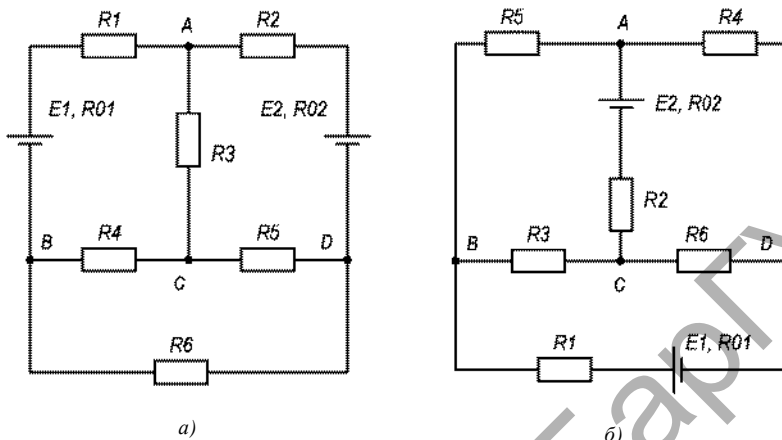


Рисунок 1.28

Т а б л и ц а 1.15

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{В}$	10	20	30	40	50	45	35	25	15	5
$E_2, \text{В}$	9	18	25	32	45	40	30	25	20	10
$R_{01}, \text{Ом}$	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	1,7	1,3	1,1	0,3	0,2
$R_{02}, \text{Ом}$	0,5	0,6	0,8	1,5	2,2	2,0	1,4	1,2	0,5	0,3
$R_1, \text{Ом}$	40	50	60	70	80	70	60	50	40	30
$R_2, \text{Ом}$	30	40	50	60	70	60	50	40	30	20
$R_3, \text{Ом}$	15	20	25	30	40	30	25	20	15	10
$R_4, \text{Ом}$	30	40	50	60	70	60	50	40	30	20
$R_5, \text{Ом}$	40	50	60	70	80	70	60	50	40	30
$R_6, \text{Ом}$	15	20	25	30	40	30	25	20	15	10

## 1.4 Метод узлового напряжения

Метод узлового напряжения применяется для расчёта цепей с двумя и более источниками, в которых есть только два узла. Даже при наличии большого количества параллельных ветвей с источниками или без них этот метод обеспечивает минимальный объём вычислений.

Напряжение между узлами  $U_{AB}$ ,  $V$ , определяется по выражению

$$U_{AB} = \sum_{i=1}^n E_i g_i / \sum_{i=1}^n g_i,$$

где  $E_i$  — ЭДС источника, включённого в  $i$ -ю ветвь цепи (если в какой-либо ветви источник ЭДС отсутствует, то соответствующее значение ЭДС считается равным нулю);

$g_i$  — проводимость  $i$ -й ветви цепи ( $\text{Ом}^{-1}$ ), включая ветви, в которых источник ЭДС отсутствует, определяемая по формуле

$$g_i = 1/R_i.$$

Сила тока в  $i$ -й ветви вычисляется по выражению

$$I_i = (E_i - U_{AB}) g_i.$$

Токи в ветвях, в которых источники отсутствуют, определяются по закону Ома для участка цепи.

При расчёте следует учитывать направления токов в цепи и их соответствие направлениям включения источников ЭДС.

### Пример решения задачи

Определить токи в ветвях цепи (рис. 1.29), если:  $E_1 = 50$  В;  $E_2 = 20$  В;  $E_3 = 30$  В,  $R_1 = 20$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 15$  Ом,  $R_n = 100$  Ом.

**Решение.** Определяем проводимости ветвей по формулам

$$g_1 = 1 / (R_1 + R_3) = 1 / (20 + 15) = 0,0286 \text{ См};$$

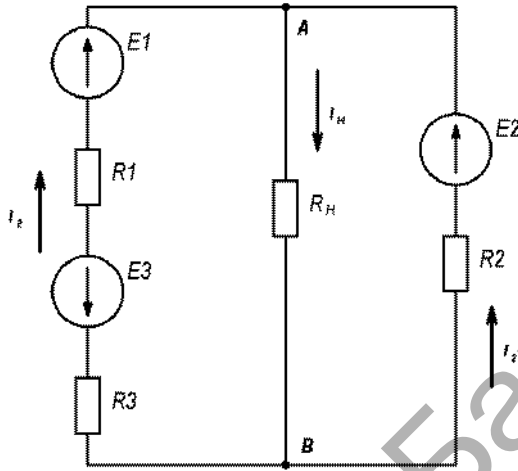


Рисунок 1.29

$$g_2 = 1 / R_2 = 1 / 10 = 0,1 \text{ См};$$

$$g_H = 1 / R_H \cong 1 / 100 = 0,01 \text{ См}.$$

Межузловое напряжение вычисляем по выражению

$$U_{AB} = \frac{(E_1 - E_3)g_1 + E_2g_2}{g_1 + g_H + g_2} = \frac{(50 - 30)0,0286 + 20 \cdot 0,1}{0,0286 + 0,01 + 0,1} = 18,3 \text{ В}.$$

Ток нагрузки определяем по формуле

$$I_H = U_{AB} / R_H = 18,3 / 100 = 0,18 \text{ А}.$$

Токи в ветвях с источниками вычисляем следующим образом:

$$I_1 = [(E_1 - E_3) - U_{AB}] g_1 = 0,04 \text{ А};$$

$$I_2 = (E_2 - U_{AB}) g_2 = 0,14 \text{ А}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.16.** Определить токи во всех ветвях цепи (рис. 1.30), мощности всех элементов, КПД цепи. Составить уравнение баланса мощности, используя исходные данные таблицы 1.16.

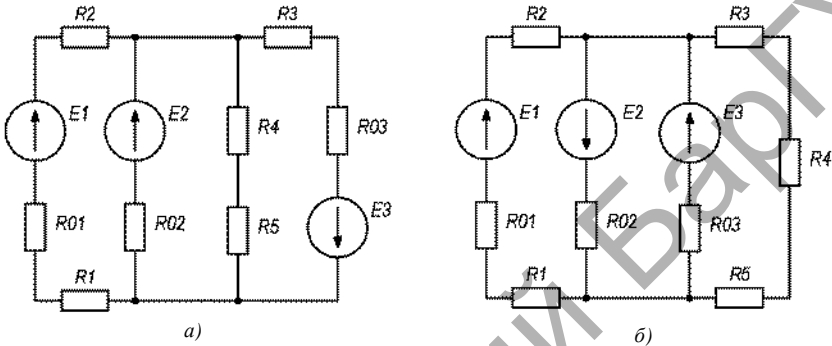


Рисунок 1.30

Т а б л и ц а 1.16

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{В}$	10	20	30	40	50	45	35	25	15	5
$E_2, \text{В}$	9	18	25	32	45	40	30	25	20	10
$E_3, \text{В}$	7	15	20	30	40	35	25	20	15	10
$R_{01}, \text{Ом}$	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	1,6	1,4	1,2	0,5	0,3
$R_{02}, \text{Ом}$	0,5	0,6	0,8	1,5	1,6	1,7	1,3	1,1	0,3	0,2
$R_{03}, \text{Ом}$	0,3	0,5	0,6	1,0	1,2	2,0	1,4	1,2	0,5	0,3
$R_1, \text{Ом}$	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4
$R_2, \text{Ом}$	4	5	6	7	8	9	8	7	6	5
$R_3, \text{Ом}$	5	4	5	6	7	8	7	6	5	4
$R_4, \text{Ом}$	4	6	7	8	9	6	5	4	5	7
$R_5, \text{Ом}$	15	20	25	30	40	45	35	25	15	10

**Задача 1.17.** Определить токи во всех ветвях цепи (рис. 1.31), мощности всех элементов, КПД цепи, используя исходные данные таблицы 1.17.

*Примечание.* Преобразование источника тока  $J$  в эквивалентный ему источник ЭДС (рис. 1.32) производится по формуле  $E = J R_J$ .

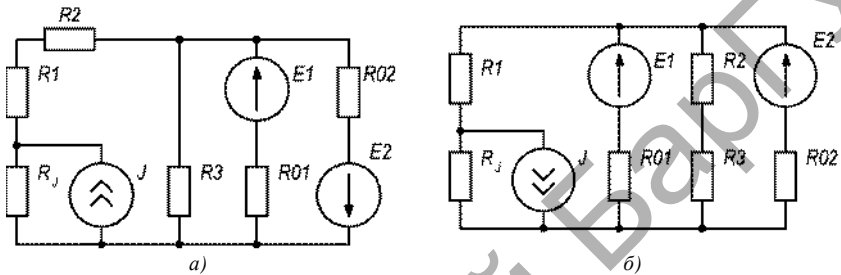


Рисунок 1.31

Т а б л и ц а 1.17

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{В}$	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50
$E_2, \text{В}$	9	18	25	32	40	15	25	35	45	55
$J, \text{А}$	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$R_{01}, \text{Ом}$	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
$R_{02}, \text{Ом}$	0,5	0,6	0,8	1,5	2,2	0,5	0,6	0,8	1,5	2,2
$R_J, \text{Ом}$	30	50	60	80	90	35	55	65	85	95
$R_1, \text{Ом}$	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
$R_2, \text{Ом}$	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8
$R_3, \text{Ом}$	5	4	5	6	7	5	4	5	6	7
$R_4, \text{Ом}$	4	6	7	8	9	4	6	7	8	9
$R_5, \text{Ом}$	15	20	25	30	40	15	20	25	30	40

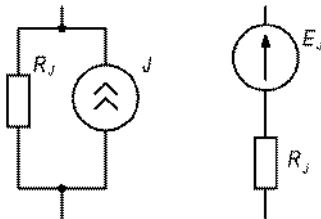


Рисунок 1.32

## 1.5 Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

Метод применяется для расчёта одноконтурных и многоконтурных цепей, в которых несколько источников расположены на разных ветвях.

При расчёте неразветвленных цепей, имеющих один контур, составляется уравнение по второму закону Кирхгофа, искомыми величинами в котором является ток цепи. При расчёте разветвлённых цепей составляется (по первому и второму законам Кирхгофа) и решается система уравнений, искомыми величинами в которых являются токи всех ветвей. Таким образом, количество уравнений в системе равно количеству искомым токам, т. е. числу ветвей в цепи.

При расчёте сложных цепей преимуществом метода является наглядность и отсутствие промежуточных преобразований схемы. Недостаток состоит в необходимости решения сложной системы уравнений при большом количестве ветвей.

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Для цепи (рис. 1.33) известны величины:  $E_1 = 8 \text{ В}$ ;  $E_2 = 24 \text{ В}$ ;  $E_3 = 9,5 \text{ В}$ ;  $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 1,5 \text{ Ом}$ ;  $R_{01} = 0,15 \text{ Ом}$ ;  $R_{02} = 0,1 \text{ Ом}$ ;  $R_{03} = 0 \text{ Ом}$ .

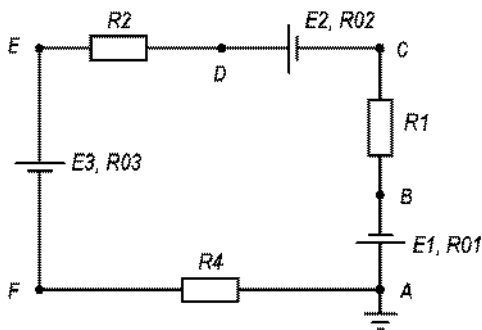


Рисунок 1.33

Определить величину и направление тока в цепи, потенциалы точек  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $G$ , приняв потенциал точки  $A$  равным нулю. Построить потенциальную диаграмму. Составить уравнение баланса мощности.

**Решение.** Выбираем направление обхода контура

по часовой стрелке, тогда значение тока

$$I = (E_1 - E_2 + E_3) / (R_1 + R_2 + R_3 + R_{01} + R_{02} + R_{03}) = (8 - 24 + 9,5) / (0,5 + 1 + 1,5 + 0,15 + 0,1 + 0) = -2 \text{ A}.$$

Знак «минус», полученный в результате вычислений, указывает на то, что ток направлен против выбранного направления обхода. В дальнейших расчетах знак «минус» не учитывается. Таким образом, источник ЭДС  $E_2$  работает в режиме генератора, а  $E_1$  и  $E_3$  — потребители.

Для определения потенциалов указанных точек обходим контур по направлению тока. Получим следующие выражения:

$$\varphi_B = \varphi_A - E_1 - IR_{01} = 0 - 8 - 2 \cdot 0,15 = -8,3 \text{ В};$$

$$\varphi_C = \varphi_B - IR_1 = -8,3 - 2 \cdot 0,5 = -9,3 \text{ В};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + E_2 - IR_{02} = -9,3 + 24 \cdot 20,1 = 14,5 \text{ В};$$

$$\varphi_E = \varphi_D - IR_2 = 14,5 - 2 \cdot 1 = 12,5 \text{ В};$$

$$\varphi_F = \varphi_E - E_3 - IR_{03} = 12,5 - 9,5 - 2 \cdot 0 = 3 \text{ В};$$

$$\varphi_A = \varphi_F - IR_3 = 3 - 2 \cdot 1,5 = 0.$$

Для построения потенциальной диаграммы (рис. 1.34) по оси ординат в масштабе откладываются потенциалы точек, а по оси абсцисс — сопротивления участков.

Баланс мощностей в электрической цепи с несколькими источниками соблюдается при условии, что сумма мощностей источников, работающих в режиме источника, равна сумме мощностей источников, работающих в режиме приёмника, и мощности всех сопротивлений цепи, включая внутренние сопротивления источников:

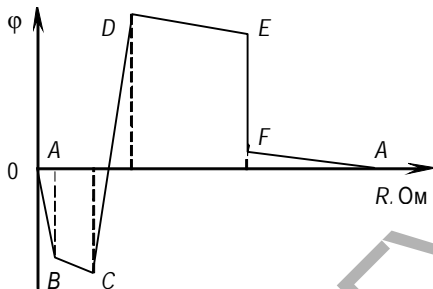


Рисунок 1.34

$$E_2 I = E_1 I + E_3 I + I^2 (R_1 + R_2 + R_2 + R_{01} + R_{02} + R_{03});$$

$$24 \cdot 2 = 8 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 + 2^2 (0,5 + 1 + 1,5 + 0,15 + 0,1 + 0);$$

$$48 \text{ Вт} = 48 \text{ Вт}.$$

Так как баланс мощностей выполняется, следовательно, задача решена верно.

**Пример 2.** В электрической цепи (рис. 1.35) известны величины: ЭДС источников  $E_1 = 10 \text{ В}$ ,  $E_2 = 20 \text{ В}$ ,  $E_3 = 15 \text{ В}$ ; сопротивления резисторов  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 5 \text{ Ом}$ . Определить токи во всех ветвях цепи.

**Решение.** Обозначим узлы буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , зададим условные направления токов  $I_1 \dots I_5$  в ветвях цепи и направления обхода контуров (рис. 1.36).

Составим два уравнения (количество узлов минус единица) по первому закону Кирхгофа для узлов  $A$  и  $C$ :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_4 + I_5 - I_2 = 0.$$

Составим три уравнения по второму закону Кирхгофа (количество неизвестных токов минус количество уравнений по первому закону Кирхгофа) для независимых контуров цепи:

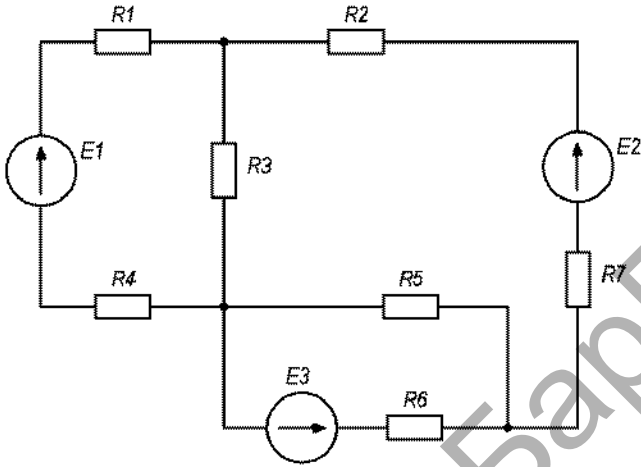


Рисунок 1.35

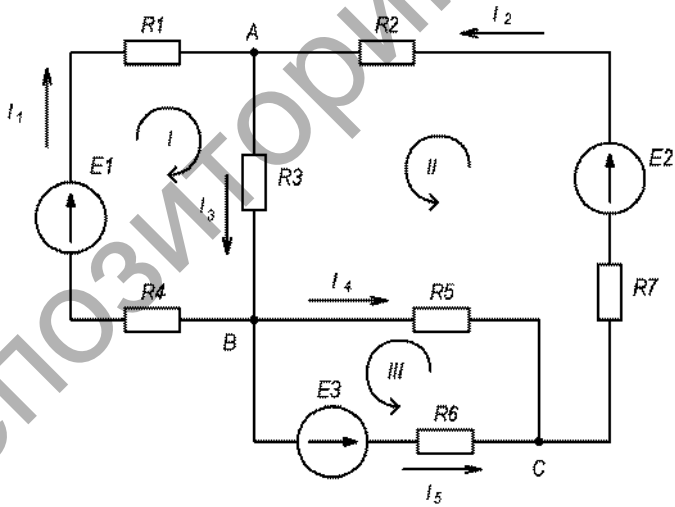


Рисунок 1.36

$$E_1 - I_1(R_1 + R_4) - I_3R_3 = 0;$$

$$E_2 - I_2(R_2 + R_7) - I_3R_3 - I_4R_5 = 0;$$

$$E_3 - I_5R_6 + I_4R_5 = 0.$$

Подставляем численные значения ЭДС и сопротивлений и после преобразований получим следующие величины:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_4 + I_5 - I_2 = 0;$$

$$14I_1 + 15I_3 = 10;$$

$$13I_2 + 15I_3 + 10I_4 = 20;$$

$$6I_5 - 10I_4 = 15.$$

Решаем систему уравнений матричным методом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 14 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения найдём матричным методом в виде  $X_0 = A^{-1}B$ :

$$X_0 = \begin{pmatrix} -0,177 \\ 1,009 \\ 0,832 \\ -0,559 \\ 1,568 \end{pmatrix}.$$

Получим следующие результаты расчётов:

$$I_1 = -0,177 \text{ A};$$

$$I_2 = 1,009 \text{ A};$$

$$I_3 = 0,832 \text{ A};$$

$$I_4 = -0,559 \text{ A};$$

$$I_5 = 1,568 \text{ A}.$$

Следовательно, на участках с резисторами  $R_1$  и  $R_4$  токи направлены противоположно ранее принятым направлениям.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.18.** Используя исходные данные таблицы 1.18, определить значение тока в цепи (рис. 1.37) и напряжения на участках  $BD$  и  $DG$  цепи аналитически и с помощью потенциальной диаграммы. Проверить баланс мощностей.

**Задача 1.19.** Определить токи в ветвях цепи (рис. 1.38) при значениях ЭДС  $E_1 = 20 \text{ В}$  и  $E_2 = 40 \text{ В}$ . Составить потенциальную диаграмму для наружного контура, используя исходные данные таблицы 1.19.

Т а б л и ц а 1.18

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{ В}$	20	16	18	22	24	26	24	22	20	18
$E_2, \text{ В}$	18	20	22	25	27	30	28	26	24	22
$E_3, \text{ В}$	10	12	11	9	7	8	10	12	14	16
$E_4, \text{ В}$	24	14	12	10	16	18	8	16	10	12
$R_1, \text{ Ом}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_2, \text{ Ом}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$R_3, \text{ Ом}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R_4, \text{ Ом}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{04}, \text{ Ом}$	0,5	0,2	0,1	0,3	0,4	0,5	0,2	0,1	0,3	0,4

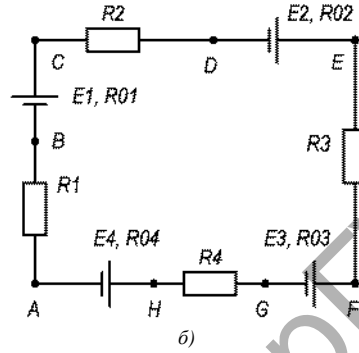
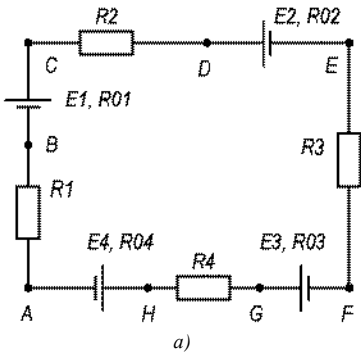


Рисунок 1.37

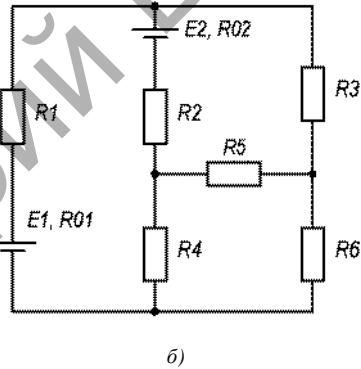
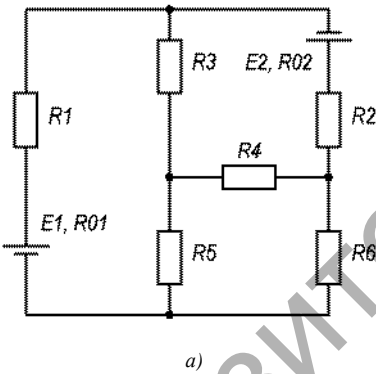


Рисунок 1.38

Т а б л и ц а 1.19

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_{01}, \text{ Ом}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$R_1, \text{ Ом}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_2, \text{ Ом}$	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6

Окончание табл. 1.19

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$R_3, \text{ Ом}$	2	3	4	5	6	7	8	9	8	7
$R_4, \text{ Ом}$	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8
$R_5, \text{ Ом}$	3	4	5	6	7	8	9	8	7	6
$R_6, \text{ Ом}$	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7

**Задача 1.20.** Используя исходные данные таблицы 1.20, составить уравнения для расчёта токов в ветвях цепи (рис. 1.39) по методу законов Кирхгофа. Определить токи в ветвях цепи, мощности всех элементов и КПД цепи. Проверить правильность решения задачи по уравнению баланса мощности.

Т а б л и ц а 1.20

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, \text{ В}$	70		60		50		40		30	
$E_2, \text{ В}$	82		62		52		42		32	
$E_3, \text{ В}$	78		68		58		48		38	
$R_{01}, \text{ Ом}$	0,5		0,1		0,3		0,4		0,2	
$R_{02}, \text{ Ом}$	1,0		2,0		0,5		1,0		0,5	
$R_{03}, \text{ Ом}$	0,2		0,2		0,1		0,1		0,5	
$R_1, \text{ Ом}$	4,5		5,0		5,5		6,0		6,5	
$R_2, \text{ Ом}$	20		15		12		10		9	
$R_3, \text{ Ом}$	25		23		22		21		20	

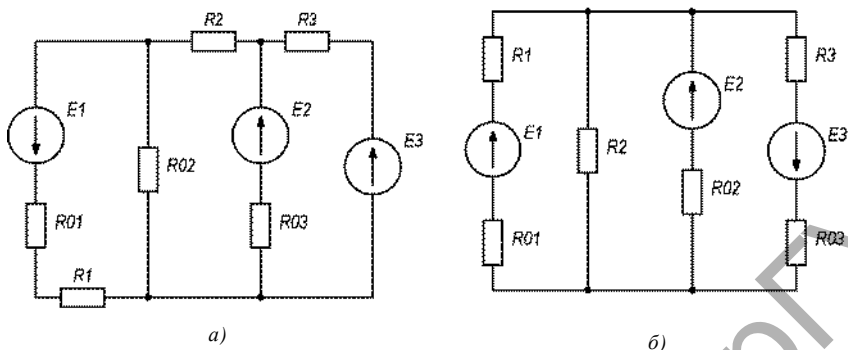


Рисунок 1.39

**Задача 1.21.** Определить токи на всех участках цепи (рис. 1.40). Проверить баланс мощностей, построить потенциальную диаграмму наружного контура, используя исходные данные таблицы 1.21.

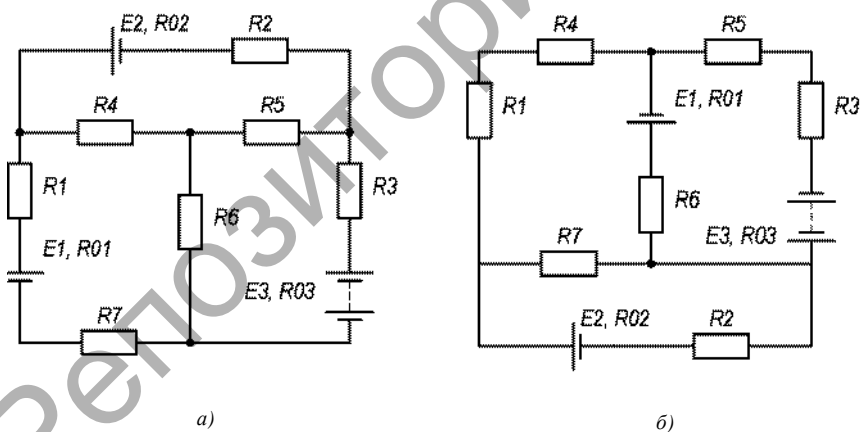


Рисунок 1.40

Т а б л и ц а 1.21

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, В$	20		60		50		40		30	
$E_2, В$	50		60		50		40		30	
$E_3, В$	4		70		60		50		4	
$R_{01}, Ом$	0,5		0,1		0,3		0,4		0,2	
$R_{02}, Ом$	1,0		2,0		0,5		1,0		0,5	
$R_{03}, Ом$	0,2		0,2		0,1		0,1		0,5	
$R_1, Ом$	10		25		30		40		20	
$R_2, Ом$	20		15		20		10		30	
$R_3, Ом$	30		20		20		20		25	
$R_4, Ом$	40		50		60		60		70	
$R_5, Ом$	20		45		30		10		20	
$R_6, Ом$	10		20		40		50		35	
$R_7, Ом$	20		30		20		10		20	

### 1.6 Метод контурных токов

Метод контурных токов является одним из наиболее рациональных методов расчёта сложных цепей с несколькими источниками, если возникает необходимость определения токов во всех ветвях. Метод основан на двух предпосылках:

- в каждом независимом контуре цепи циркулирует свой контурный ток;
- согласно принципу суперпозиции ток в реальной ветви равен алгебраической сумме соответствующих контурных токов, проходящих через эту ветвь.

Решение задачи сводится к составлению и решению системы уравнений с контурными токами и последующему определению

реальных токов ветвей. Преимущество метода по сравнению с методом непосредственного применения законов Кирхгофа — значительно меньшее количество уравнений в системе, равное количеству независимых контуров.

### Пример решения задачи

В электрической цепи (см. рис. 1.35) известны ЭДС источников  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ ,  $E_3 = 10 \text{ В}$ ; сопротивления резисторов  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 5 \text{ Ом}$ . Определить токи во всех ветвях методом контурных токов.

**Решение.** На электрической схеме зададим направления контурных токов  $I_{k1} \dots I_{k3}$  (рис. 1.41).

Составляем вспомогательные уравнения, связывающие токи ветвей с контурными токами:

$$I_1 = I_{k1};$$

$$I_2 = I_{k2};$$

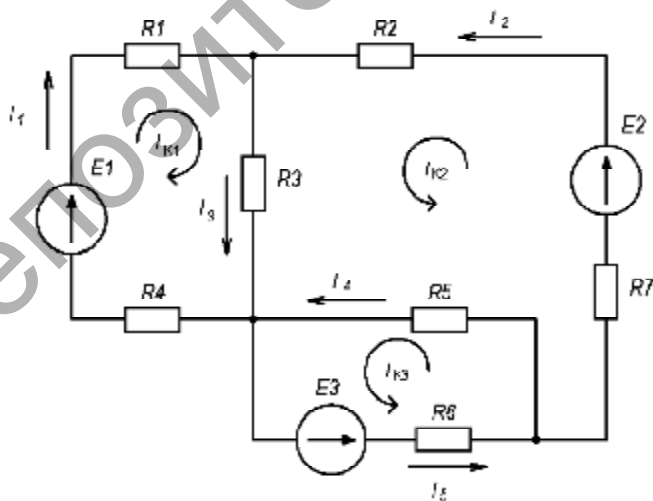


Рисунок 1.41

$$I_5 = I_{k3};$$

$$I_3 = I_{k1} + I_{k2};$$

$$I_4 = I_{k3} - I_{k2}.$$

Составляем систему из трёх уравнений для контурных токов по второму закону Кирхгофа:

$$E_1 = I_{k1} (R_1 + R_3 + R_4) + I_{k2} R_3;$$

$$E_2 = I_{k2} (R_2 + R_3 + R_5 + R_7) + I_{k1} R_3 - I_{k3} R_5;$$

$$E_3 = I_{k3} (R_5 + R_6) - I_{k2} R_5.$$

Знак «плюс» или «минус» в вышеприведённых уравнениях перед величинами ставится в зависимости от того, совпадает ли направление тока или ЭДС в ветви с направлением обхода контура.

После подстановки численных значений и упрощения получим следующие величины:

$$30 I_{k1} + 12 I_{k2} = 20;$$

$$12 I_{k1} + 40 I_{k2} - 15 I_{k3} = 10;$$

$$-15 I_{k2} + 25 I_{k3} = 10.$$

Решаем систему уравнений матричным способом:

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 12 & 0 \\ 12 & 40 & -15 \\ 0 & -15 & 25 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Решение системы уравнений определим в виде  $X_0 = A^{-1}B$ :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0,545 \\ 0,305 \\ 0,583 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$I_{k1} = 0,545 \text{ А};$$

$$I_{k2} = 0,305 \text{ A};$$

$$I_{k3} = 0,583 \text{ A}.$$

Подставляя значения контурных токов в систему вспомогательных уравнений, определим токи ветвей:

$$I_1 = I_{k1} = 0,545 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{k2} = 0,305 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{k3} = 0,583 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{k1} + I_{k2} = 0,545 + 0,305 = 0,850 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{k3} - I_{k2} = 0,583 - 0,305 = 0,278 \text{ A}.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.22.** Указать направления токов на схеме цепи (рис. 1.42). По исходным данным таблицы 1.22, вычислить токи во всех ветвях, используя метод контурных токов. Проверить Расчёт по балансу мощностей.

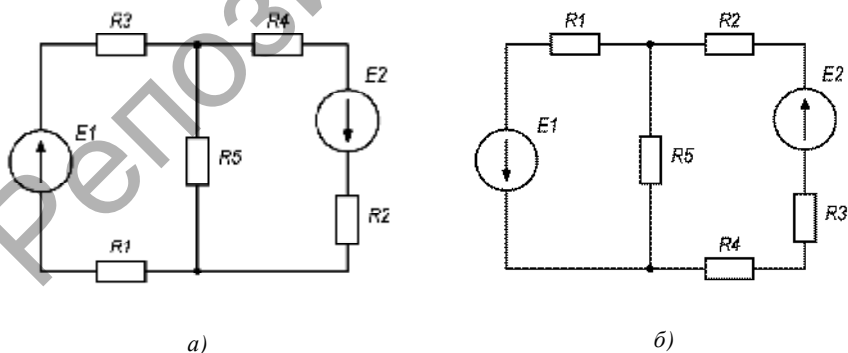


Рисунок 1.42

Т а б л и ц а 1.22

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, В$	10	20	30	40	50	45	35	25	15	5
$E_2, В$	50	40	30	20	10	50	40	30	20	10
$R_1, Ом$	3	4	5	6	7	4	5	6	7	8
$R_2, Ом$	4	5	6	7	8	5	6	7	8	9
$R_3, Ом$	5	6	7	8	9	6	7	8	9	3
$R_4, Ом$	6	7	8	9	3	3	4	5	6	7
$R_5, Ом$	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7

**Задача 1.23.** Вычислить токи во всех ветвях цепи (рис. 1.43). Проверить расчёт по балансу мощностей. Определить потенциалы узловых точек и напряжения на сопротивлениях цепи, используя исходные данные таблицы 1.23.

**Задача 1.24.** Определить токи на всех участках цепи (см. рис. 1.40), используя исходные данные задачи 1.21. Проверить баланс мощностей.

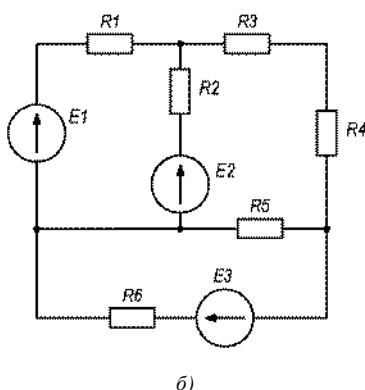
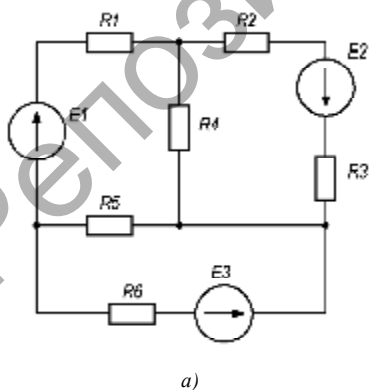


Рисунок 1.43

Т а б л и ц а 1.23

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$E_1, В$	10	20	30	40	50	45	35	25	15	5
$E_2, В$	50	40	30	20	10	50	40	30	20	10
$R_1, Ом$	3	4	5	6	7	5	6	7	8	9
$R_2, Ом$	4	5	6	7	8	6	7	8	9	3
$R_3, Ом$	5	6	7	8	9	3	4	5	6	7
$R_4, Ом$	6	7	8	9	3	4	5	6	7	8
$R_5, Ом$	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
$R_6, Ом$	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8

## 1.7 Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора применяется для определения тока и расчёта режимов работы одной выделенной ветви с приёмником. Вся остальная часть цепи условно заменяется эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на его выводах, а внутреннее сопротивление равно выходному сопротивлению относительно рассматриваемой ветви с приёмником. При исключении источников из схемы предполагают, что собственные сопротивления источников ЭДС в схеме сохраняются.

При определении параметров  $E_{\text{экв}}$  и  $R_{\text{экв}}$  эквивалентного генератора целесообразно вычертить две вспомогательные схемы.

Первая схема служит для определения напряжения холостого хода, равного ЭДС эквивалентного генератора ( $U_0 = E_{\text{экв}}$ ) и отличается от исходной тем, что исследуемая ветвь с сопротивлением приёмника  $R_n$  разрывается. Затем методом контурных токов, по законам Кирхгофа или другим методом определяют напряжение между точками разрыва  $U_0$ , равное ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{экв}}$ .

Во второй схеме исключают все источники и находят выходное сопротивление  $R_{\text{экв}}$  относительно зажимов приёмника.

Искомый ток в ветви с приёмником определяется по формуле

$$I = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}} + R_{\text{н}}},$$

где  $R_{\text{ЭКВ}}$  — выходное сопротивление эквивалентного генератора, равное его внутреннему эквивалентному сопротивлению.

### Пример решения задачи

Методом эквивалентного генератора определить ток в сопротивлении  $R_1$ , подключённом к точкам  $A$  и  $B$  электрической цепи (рис. 1.44).

**Решение.** Выделим всю часть цепи, за исключением резистора  $R_1$ , в эквивалентный генератор (рис. 1.45).

Определим ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{ЭКВ}}$  при холостом ходе ( $R_1 \rightarrow \infty$ ) по формуле

$$E_{\text{ЭКВ}} = U_{AC} - U_{BC}.$$

Знак «минус» обусловлен тем, что источники в схеме включены встречно и потенциал в точке  $A$  больше потенциала в точке  $B$ , так как  $E_1 > E_2$ .

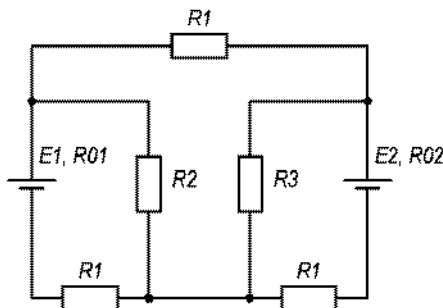


Рисунок 1.44

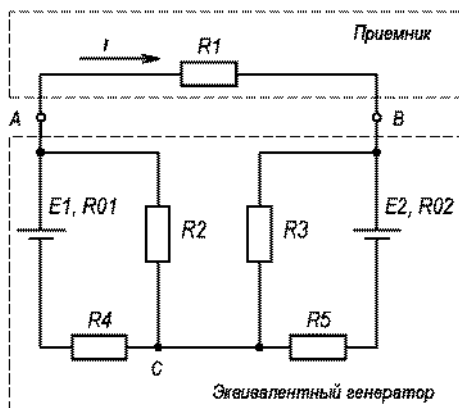


Рисунок 1.45

Напряжения вычислим следующим образом:

$$U_{AC} = I_2 R_2 = \frac{E_1 R_2}{R_{01} + R_2 + R_4} = \frac{40 \cdot 10}{0,4 + 10 + 3,6} = 28,6 \text{ В};$$

$$U_{BC} = I_3 R_3 = \frac{E_2 R_3}{R_{02} + R_3 + R_5} = \frac{30 \cdot 10}{0,4 + 10 + 3,6} = 21,4 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$E_{\text{ЭКВ}} = U_{AC} - U_{BC} = 28,6 - 21,4 = 7,2 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора также определим в режиме холостого хода ( $R_1 \rightarrow \infty$ ) по формуле

$$\begin{aligned} R_{\text{ЭКВ}} &= \frac{R_2(R_{01} + R_4)}{R_2 + R_{01} + R_4} + \frac{R_3(R_{02} + R_5)}{R_3 + R_{02} + R_5} = \\ &= \frac{10(0,4 + 3,6)}{10 + 0,4 + 3,6} + \frac{10(0,4 + 3,6)}{10 + 0,4 + 3,6} = 5,72 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Искомый ток получим из выражения

$$I_1 = \frac{E_{\text{ЭКВ}}}{R_{\text{ЭКВ}} + R_1} = \frac{7,2}{5,72 + 30} = 0,2 \text{ А}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.25.** Определить направление и силу тока в резисторе  $R_3$  методом эквивалентного генератора при заданных параметрах элементов цепи (рис. 1.46), используя исходные данные таблицы 1.24.

**Задача 1.26.** Используя метод эквивалентного генератора, определить изменение силы тока на участке  $AB$  (рис. 1.47) при варьировании сопротивления  $R_1$  в интервале от 10 до 30 Ом (применить исходные данные таблицы 1.25).

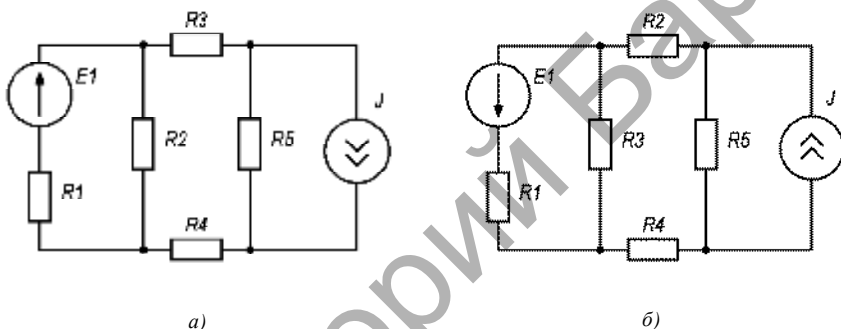
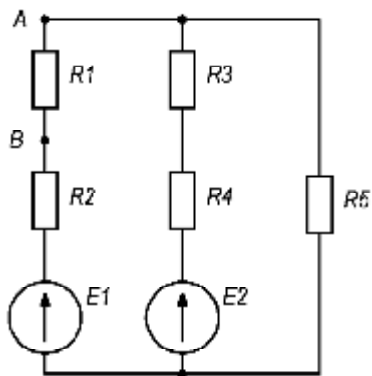


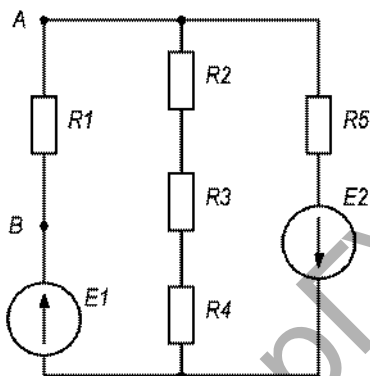
Рисунок 1.46

Т а б л и ц а 1.24

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_1$ , Ом	10	10	15	15	20	20	15	15	10	10
$R_2$ , Ом	20	15	20	15	10	15	20	15	10	15
$R_3$ , Ом	30	35	20	25	30	35	30	25	20	25
$R_4$ , Ом	15	15	20	20	25	25	15	15	20	20
$R_5$ , Ом	30	20	15	10	10	25	35	15	10	10
$E_1$ , В	10	15	20	25	30	30	25	20	15	10
$J$ , Ом	1	2	3	4	3	2	1	2	3	4



a)



б)

Рисунок 1.47

Т а б л и ц а 1.25

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$R_2$ , Ом	20	15	20	15	10	15	20	15	10	15
$R_3$ , Ом	30	35	20	25	30	35	30	25	20	25
$R_4$ , Ом	15	15	20	20	25	25	15	15	20	20
$R_5$ , Ом	30	20	15	10	10	25	35	15	10	10
$E_2$ , Ом	10	20	30	40	30	20	10	20	30	40

## 2 РАСЧЁТ ОДНОФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 2.1 Расчёт неразветвлённых однофазных цепей

Неразветвлённая цепь переменного синусоидального тока содержит один или несколько резисторов, индуктивных и ёмкостных элементов, включённых последовательно на синусоидальное напряжения питания.

Метод сопротивлений основан на применении закона Ома для участка цепи синусоидального тока, а также второго закона Кирхгофа для контура.

Сила тока  $I$  (А) на участке цепи определяется по закону Ома

$$I = \frac{U}{Z},$$

где  $U$  — напряжение на выводах цепи (В);

$Z$  — полное сопротивление цепи (Ом), вычисляем по формуле

$$Z = \sqrt{\Sigma P^2 + (\Sigma X_L - \Sigma X_C)^2}.$$

При этом индуктивные  $X_L$  и ёмкостные  $X_C$  сопротивления элементов (Ом) определяются по формулам

$$X_L = 2\pi fL;$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC},$$

где  $f$  — частота тока, Гц;

$L$  — индуктивность катушки, Гн;

$C$  — ёмкость конденсатора, Ф.

Угол сдвига фаз между током и напряжением рассчитывается по выражению

$$\varphi = \arctg \frac{\Sigma X_L - \Sigma X_C}{\Sigma R}.$$

Второй закон Кирхгофа устанавливает зависимость между подведённым напряжением источника (или ЭДС источника) и падениями напряжения на элементах цепи и справедлив для мгновенных значений напряжения (В), т. е.

$$u_{\text{ист}} = \sum u_i,$$

где  $u_{\text{ист}}$  — мгновенное значение напряжения источника;

$u_i$  — мгновенное значение напряжения на  $i$ -м приёмнике.

На практике используются выражения в векторном или комплексном виде:

$$\dot{U}_{\text{ист}} = \sum \dot{U}_i;$$

$$\dot{U}_{\text{ист}} \& = \sum \dot{U}_i \&.$$

Уравнения баланса мощностей имеют вид

$$P_{\text{ист}} = \sum R_i I_i^2;$$

$$Q_{\text{ист}} = (\sum X_{L_i} - \sum X_{C_i}) I_i^2;$$

$$S_{\text{ист}} = \sum Z_i I_i^2,$$

где  $P_{\text{ист}}$ ,  $Q_{\text{ист}}$ ,  $S_{\text{ист}}$  — сумма активных, реактивных и полных мощностей источников соответственно;

$R_i$ ,  $X_{L_i}$ ,  $X_{C_i}$ ,  $Z_i$  — активное, индуктивное, ёмкостное и полное сопротивление  $i$ -го приёмника соответственно.

### Пример решения задачи

Неразветвлённая цепь переменного тока (рис. 2.1) содержит активные и реактивные сопротивления:  $R = 32$  Ом,  $X_{L1} = 25$  Ом,  $X_{L2} = 15$  Ом,  $X_{C1} = 8$  Ом,  $X_{C2} = 8$  Ом. Напряжение на индуктивности  $L_1$ ,  $U_{L1}$  составляет 125 В.

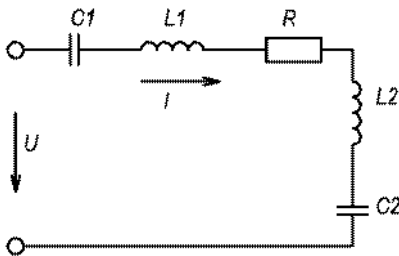


Рисунок 2.1

Определить полное сопротивление цепи  $Z$ ; напряжение источника  $U$ ; силу тока  $I$ ; угол сдвига фаз  $\varphi$ ; активную  $P$ , реактивную  $Q$  и полную  $S$  мощности, потребляемые цепью. Построить векторную диаграмму цепи. Определить изменение тока в цепи при увеличении частоты тока источника в два раза.

**Решение.** Сила тока в цепи равна току через индуктивность  $L_1$  и определяется по формуле

$$I = U_{L1} / X_{L1} = 125 / 25 = 5 \text{ А.}$$

Реактивное сопротивление цепи вычисляем по выражению

$$X = X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2} = 25 + 15 - 8 - 8 = 24 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление цепи определяем следующим образом:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1024 + 576} = \sqrt{1600} = 40 \text{ Ом.}$$

Напряжение, приложенное к цепи, находим из выражения

$$U = IZ = 5 \cdot 40 = 200 \text{ В.}$$

Угол сдвига фаз вычисляем по формуле

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{24}{32} = 36,9^\circ.$$

Знак угла  $\varphi$  положительный, следовательно, характер нагрузки в цепи в целом активно-индуктивный.

Активная, реактивная и полная мощности, потребляемые цепью, вычисляем следующим образом:

$$P = I^2 R = 5^2 \cdot 32 = 800 \text{ Вт;}$$

$$Q = I^2 R = 5^2 \cdot 24 = 600 \text{ вар};$$

$$S = UI = 200 \cdot 5 = 1\,000 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Для построения векторной диаграммы токов и напряжений принимаем масштабы: тока  $M_I = 0,5 \text{ А} / \text{см}$ , напряжения  $M_U = 20 \text{ В} / \text{см}$ .

Вектор тока откладываем в выбранном масштабе горизонтально вправо, считая начальную фазу тока равной нулю.

Для построения векторной диаграммы напряжений определим падения напряжений на всех элементах цепи по формулам

$$U_{C1} = I X_{C1} = 5 \cdot 8 = 40 \text{ В};$$

$$U_R = I R = 5 \cdot 32 = 160 \text{ В};$$

$$U_{L2} = I X_{L2} = 5 \cdot 15 = 75 \text{ В};$$

$$U_{C2} = I X_{C2} = 5 \cdot 8 = 40 \text{ В}.$$

Векторную диаграмму напряжений (рис. 2.2) строим согласно уравнению на основании второго закона Кирхгофа:

$$\dot{U} = \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_R + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{C2},$$

для чего последовательно откладываем указанные векторы, учитывая фазовые углы: для ёмкостных элементов напряжение отстаёт от тока на угол  $90^\circ$  (по часовой стрелке), для индуктивных — опережает ток на угол  $90^\circ$  (против часовой стрелки), для активного — направлен вдоль вектора тока (совпадает с ним по фазе).

Вектор входного напряжения получим путём геометрического сложения построенных векторов.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.1.** К цепи (рис. 2.3) приложено напряжение  $U = 220 \text{ В}$  с частотой  $f = 50 \text{ Гц}$ . Вычислить ток цепи  $I$  и записать его мгновенное значение. Записать мгновенное значение напряжения  $U$ , определить

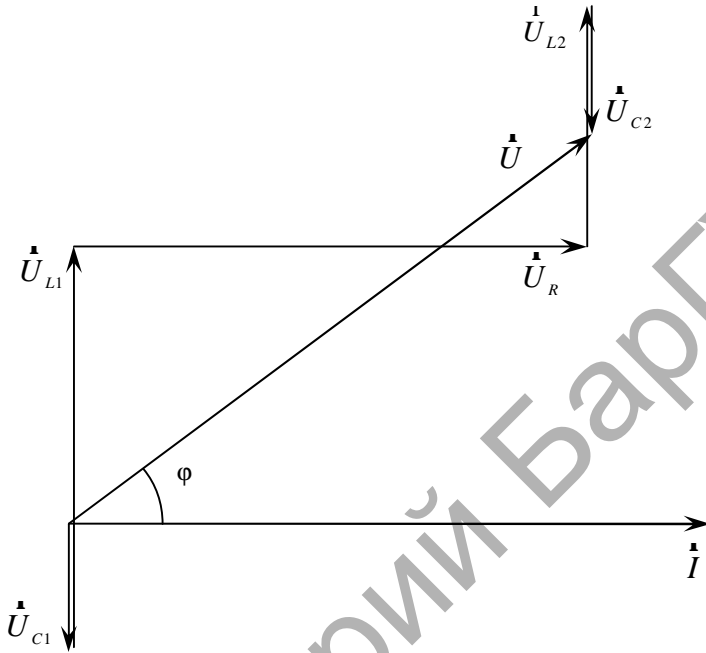


Рисунок 2.2

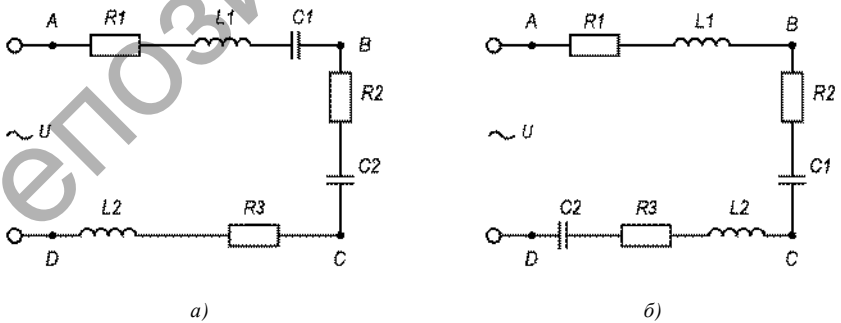


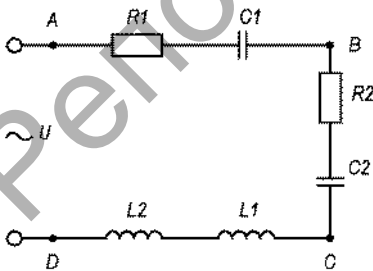
Рисунок 2.3

угол сдвига фаз  $\varphi$  и характер нагрузки в цепи. Определить напряжения на участках  $AB$  и  $BC$ , построить в масштабе векторную диаграмму тока и напряжений, определив предварительно напряжение на каждом сопротивлении. Вычислить активную, реактивную и полную мощности цепи, используя исходные данные таблицы 2.1.

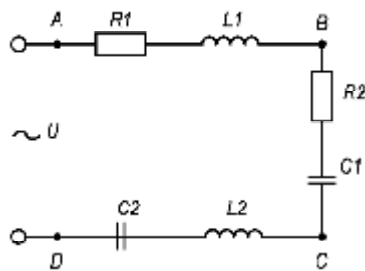
**Задача 2.2.** Вычислить значения индуктивности и ёмкости реактивных элементов, определить напряжение на каждом сопротивлении, а также между точками  $A$  и  $C$  цепи (рис. 2.4). Построить в масштабе векторную диаграмму тока и напряжений, используя исходные данные таблицы 2.2.

Т а б л и ц а 2.1

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$R_1, \text{ Ом}$	70	0	60	50	0	40	50	0	70	80
$R_2, \text{ Ом}$	40	50	0	70	80	0	60	70	0	90
$R_3, \text{ Ом}$	0	60	70	0	90	70	0	60	50	0
$X_{L1}, \text{ Ом}$	60	0	80	40	0	50	60	70	90	30
$X_{L2}, \text{ Ом}$	30	40	0	60	70	30	40	50	60	70
$X_{C1}, \text{ Ом}$	50	60	70	90	30	60	0	30	90	0
$X_{C2}, \text{ Ом}$	30	40	50	60	70	30	60	0	50	20



а)



б)

Рисунок 2.4

Т а б л и ц а 2.2

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$I$ , А	5	6	7	3	4	—	—	—	—	—
$U$ , В	—	—	—	—	—	50	70	90	110	130
$f$ , Гц	50	100	50	100	50	50	100	50	100	50
$\psi$ , град	0	30	25	35	45	0	30	25	35	45
$R_1$ , Ом	8	7	6	15	14	8	7	16	5	14
$R_2$ , Ом	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11
$X_{L1}$ , Ом	20	18	16	14	12	20	18	16	14	12
$X_{L2}$ , Ом	18	20	22	14	12	18	20	22	14	12
$X_{C1}$ , Ом	10	14	8	12	6	10	14	8	12	6
$X_{C2}$ , Ом	14	12	8	16	18	14	12	8	6	18

**Задача 2.3.** К сети с переменным синусоидальным напряжением  $U$  с частотой  $f$  тока  $I$  включены последовательно резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы (рис. 2.5). Определить показания измерительных приборов, включённых в цепь: амперметра, вольтметра, ваттметра и фазометра. Составить уравнение баланса мощности и проверить правильность расчёта. Построить векторную диаграмму напряжения и токов, используя исходные данные таблицы 2.3.

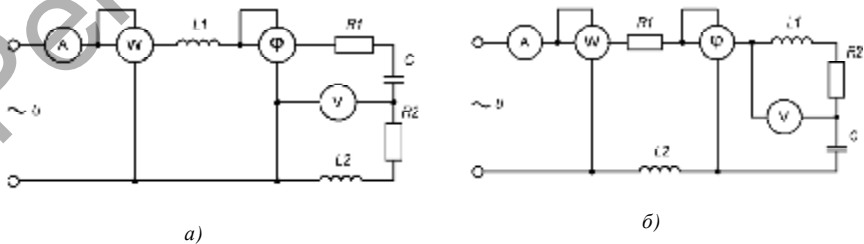


Рисунок 2.5

Т а б л и ц а 2.3

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	а	б	б	а	а	б	б	а	б
$U, В$	400	—	450	—	450	—	500	—	550	—
$I, А$	—	5	—	6	—	8	—	6	—	6
$f, Гц$	50	50	60	60	50	50	60	60	50	60
$R_1, Ом$	30	40	50	60	80	70	60	50	40	30
$R_2, Ом$	80	70	60	50	40	30	20	30	40	50
$L_1, мГн$	100	200	110	190	120	180	130	170	140	150
$L_2, мГн$	180	130	170	140	150	100	200	110	190	120
$C, мкФ$	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110

**Задача 2.4.** Однофазный двигатель, включённый в сеть с напряжением  $U = 220 В$ , потребляет ток  $I = 5 А$  при коэффициенте мощности двигателя  $\cos \varphi$ . Определить активную мощность двигателя, его активное и реактивное сопротивления, используя исходные данные таблицы 2.4.

**Задача 2.5.** В сеть с напряжением  $U$  включены последовательно индуктивная катушка с активным сопротивлением  $R_L$  и индуктивностью  $L$ , а также конденсатор  $C$ . Определить ёмкость конденсатора, при которой в цепи возникает резонанс напряжений. Найти ток в цепи и напряжения на индуктивном и ёмкостном элементах. Построить диаграмму напряжений, используя исходные данные таблицы 2.5.

Т а б л и ц а 2.4

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, В$	110	110	127	127	220	220	380	380	440	440
$I, А$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\cos \varphi$	0,64	0,71	0,67	0,75	0,72	0,73	0,82	0,77	0,69	0,75

Т а б л и ц а 2.5

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, \text{В}$	110	110	127	127	220	220	380	380	440	440
$R_L, \text{Ом}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$L, \text{мГн}$	42,2	84,5	169,0	253,5	338,0	380,0	422,0	464,0	507,0	549,0

## 2.2 Расчёт разветвлённых однофазных цепей

Для расчёта разветвлённых цепей переменного синусоидального тока, а также разветвлённых участков сложных последовательно-параллельных цепей применяется метод проводимостей. В основе метода лежит эквивалентная замена сопротивлений в параллельных ветвях (рис. 2.6) на проводимости (рис. 2.7, а), что позволяет затем их суммировать и найти активную, индуктивную и емкостную проводимости всей цепи (см. рис. 2.7, б).

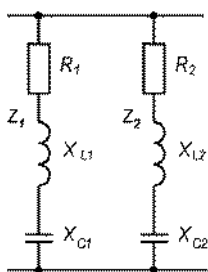


Рисунок 2.6

Для каждой отдельно взятой ветви активная  $g$ , индуктивная  $b_L$  и емкостная  $b_C$  проводимости определяются по формулам

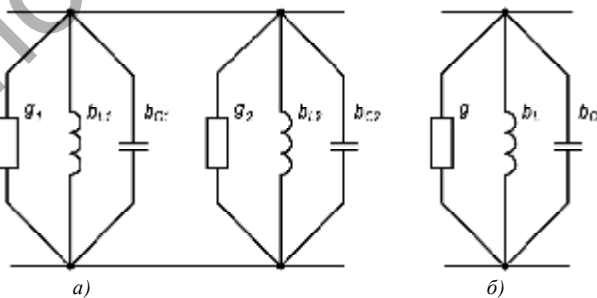


Рисунок 2.7

$$g = R / Z^2;$$

$$b_L = X_L / Z^2;$$

$$b_C = X_C / Z^2,$$

где  $Z$  — полное сопротивление этой ветви (Ом), вычисляемое по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Угол сдвига фаз для отдельной ветви находится из выражения

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Ток в неразветвленной части цепи определяется по закону Ома для разветвленных цепей:

$$I = Uy,$$

где  $y$  — полная проводимость всей цепи,  $\text{Ом}^{-1}$ , вычисляемая по формуле

$$y = \sqrt{\Sigma g^2 + (\Sigma b_L - \Sigma b_C)^2},$$

где  $\Sigma g$ ,  $\Sigma b_L$ ,  $\Sigma b_C$  — суммарные активная, индуктивная и ёмкостная проводимости всей цепи,  $\text{Ом}^{-1}$ .

При этом угол сдвига фаз для цепи в целом определяем из выражения

$$\varphi = \arctg \frac{\Sigma b_L - \Sigma b_C}{\Sigma g}.$$

### Пример решения задачи

Для разветвленной цепи переменного тока с параметрами  $R_1 = 12 \text{ В}$ ;  $X_{L1} = 16 \text{ Ом}$ ;  $X_{C2} = 20 \text{ Ом}$ ;  $U = 100 \text{ В}$  (рис. 2.8) определить:

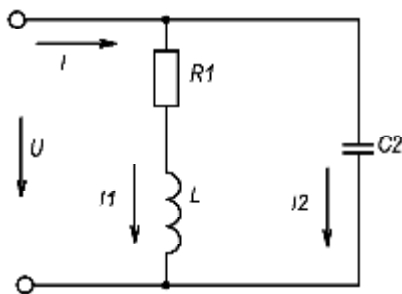


Рисунок 2.8

напряжения на элементах цепи; токи ветвей и общий ток цепи; активную, реактивную и полную мощности ветвей и всей цепи; углы сдвига фаз между напряжением и током каждой ветви и всей цепи. Построить в масштабе векторную диаграмму цепи.

**Решение.** Полные сопротивления ветвей вычисляем следующим образом:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = X_{C2} = 20 \text{ Ом};$$

активная  $g$ , индуктивная  $b_L$  и ёмкостная  $b_C$  проводимости ветвей и всей цепи —

$$g = g_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{12}{20^2} = 0,03 \text{ Ом}^{-1};$$

$$b_L = b_{L1} = \frac{X_{L1}}{Z_1^2} = \frac{16}{20^2} = 0,04 \text{ Ом}^{-1};$$

$$b_C = b_{C2} = \frac{X_{C2}}{Z_1^2} = \frac{20}{20^2} = 0,05 \text{ Ом}^{-1};$$

полная проводимость цепи —

$$y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{0,03^2 + (0,04 - 0,05)^2} = 0,0316 \text{ Ом}^{-1};$$

сила тока источника —

$$I = Uy = 100 \cdot 0,0316 = 3,16 \text{ A};$$

ТОКИ В ВЕТВЯХ —

$$I_1 = U / Z_1 = 100 / 20 = 5 \text{ A};$$

$$I_2 = U / Z_2 = 100 / 20 = 5 \text{ A};$$

напряжения на резисторе и катушке в первой ветви —

$$U_{R1} = I_1 R_1 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ В};$$

$$U_{L1} = I_1 X_{L1} = 5 \cdot 16 = 80 \text{ В};$$

углы сдвига фаз между напряжением и током для ветвей и всей цепи —

$$\varphi_1 = \arctg \frac{b_L}{g_1} = \arctg \frac{0,04}{0,03} = 53,1^\circ;$$

$$\varphi_2 = -90^\circ;$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g} = \arctg \frac{0,04 - 0,05}{0,03} = -18,4^\circ.$$

Векторную диаграмму токов и напряжений (рис. 2.9) строим в масштабе тока  $m_I$  и масштабе напряжений  $m_U$ .

Активная мощность первой ветви и всей цепи составляет:

$$P = P_1 = I_1^2 R_1 = 5^2 \cdot 12 = 300 \text{ Вт};$$

индуктивная мощность первой ветви и всей цепи —

$$Q_L = Q_{L1} = I_1^2 X_{L1} = 5^2 \cdot 16 = 400 \text{ вар};$$

ёмкостная мощность первой ветви равна нулю;

полная мощность первой ветви —

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_{L1}^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ В} \cdot \text{А};$$

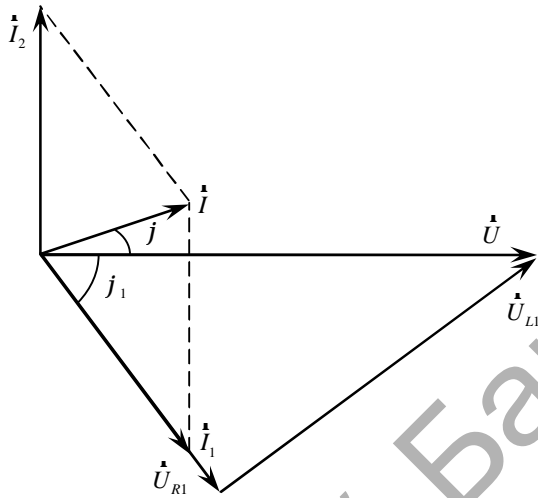


Рисунок 2.9

активная и индуктивная мощности второй ветви равны нулю;  
ёмкостная мощность второй ветви и всей цепи —

$$Q_C = Q_{C2} = I_2^2 X_{C1} = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ вар};$$

реактивная мощность всей цепи —

$$Q = Q_L - Q_C = 400 - 500 = -100 \text{ вар};$$

полная мощность второй ветви равна её ёмкостной мощности —

$$S_2 = Q_{C2} = 500 \text{ вар};$$

полная мощность всей цепи —

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{300^2 + (-100)^2} = 316,2 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.6.** Определить ёмкость конденсатора, необходимую для создания в цепи (рис. 2.9) резонанса токов. Построить векторную диаграмму напряжения и токов, используя исходные данные из таблицы 2.6.

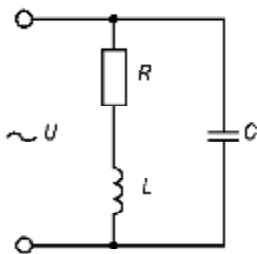


Рисунок 2.9

Т а б л и ц а 2.6

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U$ , В	127	220	220	110	110	127	220	220	110	110
$f$ , Гц	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$R$ , Ом	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$L$ , мГн	63,7	50,0	127,4	31,8	63,7	63,7	50,0	127,4	31,8	100,0

**Задача 2.7.** Определить токи на всех участках цепи (рис. 2.10), углы сдвига фаз этих токов относительно напряжения, полную  $S$ , активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности цепи, а также частоту, при которой наступит резонанс токов. Построить векторную диаграмму напряжения и токов, используя исходные данные таблицы 2.7.

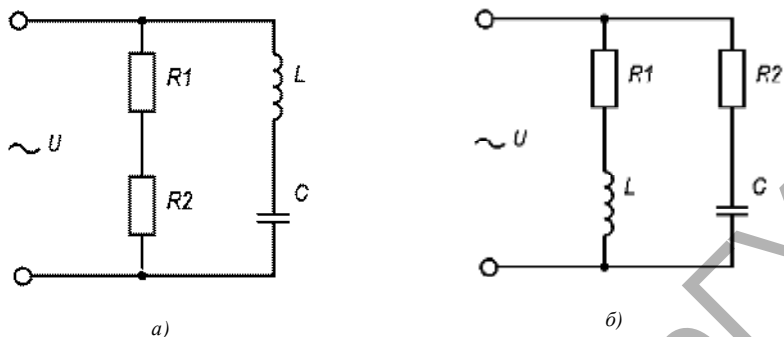


Рисунок 2.10

Т а б л и ц а 2.7

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$U$ , В	127	220	220	110	110	127	220	220	110	110
$f$ , Гц	50	50	100	50	100	100	60	60	50	50
$R_1$ , Ом	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$R_2$ , Ом	30	40	50	60	70	80	90	80	70	60
$L$ , мГн	63,7	50,0	127,0	31,8	63,7	63,7	50,0	127,0	31,8	63,7
$C$ , мкФ	212	106	212	318	106	212	106	212	318	106

**Задача 2.8.** К сети с переменным синусоидальным напряжением  $U$  и частотой  $f$  тока  $I$ , включены резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы. Определить показания измерительных приборов, включённых в цепь: амперметра, вольтметра, ваттметра и фазометра. Составить уравнение баланса мощности и проверить правильность расчёта. Построить векторную диаграмму напряжения и токов, используя исходные данные таблицы 2.8.

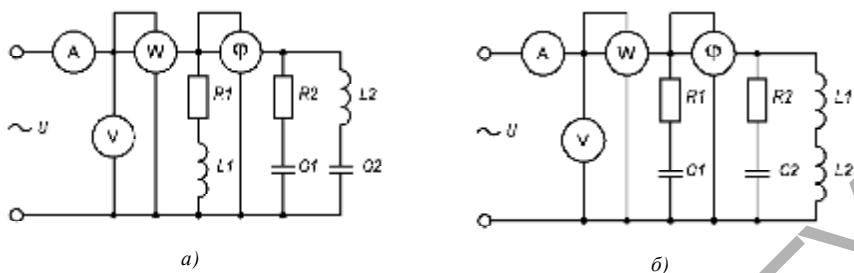


Рисунок 2.11

Т а б л и ц а 2.8

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$U$ , В	400	—	450	—	450	—	500	—	550	—
$I$ , А	—	5	—	6	—	8	—	6	—	6
$f$ , Гц	50	50	60	60	50	50	60	60	50	60
$R_1$ , Ом	30	40	50	60	80	70	60	50	40	30
$R_2$ , Ом	80	70	60	50	40	30	20	30	40	50
$L_1$ , мГн	100	200	110	190	120	180	130	170	140	150
$L_2$ , мГн	180	130	170	140	150	100	200	110	190	120
$C_1$ , мкФ	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
$C_2$ , мкФ	85	90	95	70	75	80	85	90	95	105

**Задача 2.9.** Однофазный двигатель, включённый в сеть с напряжением  $U$ , потребляет ток  $I$  при коэффициенте мощности двигателя  $\cos \varphi$ . Определить ёмкость конденсатора, который при параллельном включении обеспечит полную компенсацию реактивной мощности, используя исходные данные таблицы 2.9.

Т а б л и ц а 2.9

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, В$	110	110	127	127	220	220	380	380	440	440
$I, А$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\cos \varphi$	0,64	0,71	0,67	0,75	0,72	0,73	0,82	0,77	0,69	0,75

**Задача 2.10.** Активно-индуктивный приёмник с сопротивлениями  $R$  и  $X_L$  включён в сеть с напряжением  $U$ . Определить ёмкость конденсатора, который при параллельном включении обеспечит повышение коэффициента мощности до значения  $\cos \varphi'$ , используя исходные данные таблицы 2.10.

**Задача 2.11.** Определить ёмкость конденсатора для повышения коэффициента мощности до  $\cos \varphi' = 0,95$  (рис. 2.12) люминесцентного светильника с номинальным напряжением питания  $U$ , напряжением на зажимах лампы  $U_d$  и мощностью  $P_{\text{ном}}$ , используя исходные данные таблицы 2.11.

**Задача 2.12.** На сколько процентов уменьшится потребляемый из сети ( $U_{\text{ном}} = 220 В, f = 50 Гц$ ) ток при подключении конденсатора ёмкостью  $C$  параллельно однофазному асинхронному электродвигателю с номинальными параметрами  $P_{\text{ном}}$ ,  $\cos \varphi_{\text{ном}}$  и  $\eta_{\text{ном}}$ , работающему в номинальном режиме (рис. 2.13). При решении использовать исходные данные таблицы 2.12.

Т а б л и ц а 2.10

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, В$	40	40	50	50	60	60	70	70	80	80
$R, Ом$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$X_L, Ом$	6	7	8	9	8	5	4	3	2	1
$\cos \varphi'$	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,0

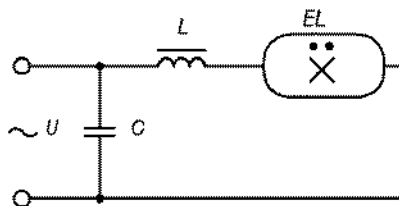


Рисунок 2.12

Т а б л и ц а 2.11

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{\text{ном}}, \text{Вт}$	18	38	40	60	80	18	38	40	60	80
$\cos \varphi$	0,50	0,55	0,60	0,65	0,50	0,60	0,45	0,55	0,60	0,45
$U, \text{В}$	127	220	220	220	220	127	220	220	220	220
$U_{\text{л}}, \text{В}$	80	90	100	110	120	110	95	100	90	85

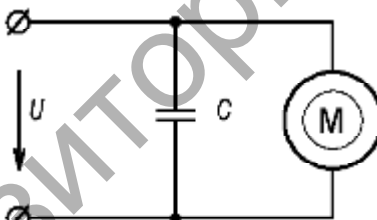


Рисунок 2.13

Т а б л и ц а 2.12

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{\text{ном}}, \text{кВт}$	0,37	0,18	0,55	0,12	1,50	1,50	0,75	0,55	0,37	0,12
$\cos \varphi_{\text{ном}}$	0,61	0,65	0,74	0,65	0,63	0,62	0,65	0,71	0,65	0,68
$\eta_{\text{ном}}$	0,72	0,75	0,78	0,73	0,72	0,71	0,73	0,72	0,71	0,78
$C, \text{мкФ}$	20	30	40	25	35	55	45	65	20	15

### 2.3 Комплексный метод расчёта однофазных цепей

В основе метода лежит представление синусоидальных электрических величин — токов, напряжений, сопротивлений и мощностей — в комплексном виде. Важнейшее преимущество этого метода состоит в значительном упрощении расчётов сложных цепей, так как действия с комплексными величинами выполняются относительно простыми методами, принятыми для цепей постоянного тока.

В алгебраической форме записи действительная часть комплексного числа равна активной составляющей, мнимая часть — реактивной составляющей величины. Например, для участка цепи с полным сопротивлением  $\underline{Z} = 30 - j40$  активное сопротивление  $R$  равно 30 Ом, реактивное  $X$  составляет  $-40$  Ом. При этом знак «минус» перед мнимой частью указывает на то, что реактивное сопротивление в целом имеет ёмкостный, а не индуктивный характер.

В общем виде полное сопротивление неразветвлённого участка цепи с сопротивлениями  $R$ ,  $X_L$  и  $X_C$  выглядит следующим образом:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C).$$

В показательной форме модуль комплексного числа определяет длину вектора, аргумент — начальный фазовый угол на комплексной плоскости. Например, значению напряжения в комплексном виде  $\underline{U} = 220e^{-j30^\circ}$  соответствует действующее значение напряжения  $U = 220$  В, и начальный фазовый угол  $\psi_U = -30^\circ$  (рис. 2.14).

Перевод комплексных электрических величин из алгебраической формы записи в показательную и обратно производится с помощью тригонометрической формы записи, согласно которой действительная и мнимая части комплексного числа соответственно равны проекциям вектора на оси комплексной плоскости (см. рис. 2.14). Так, для тока  $\underline{I} = 5e^{j60^\circ}$  его активная  $I_a$  и реактивная  $I_p$  составляющие равны соответственно действительной и мнимой частям комплексного тока:

$$I_a = 5 \cdot \cos 60^\circ = 2,5 \text{ А};$$

$$I_p = 5 \cdot \sin 60^\circ = 4,33 \text{ А}.$$

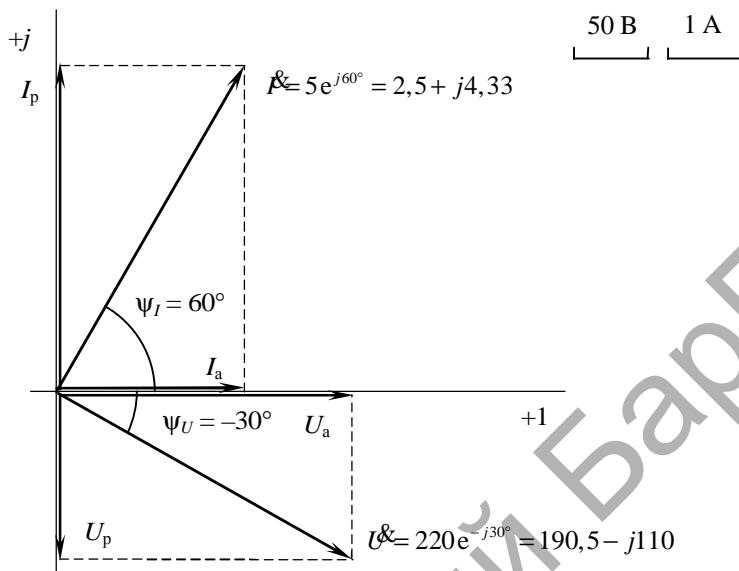


Рисунок 2.14

Тогда алгебраическая форма записи комплексного тока будет иметь вид

$$\underline{I} = 5e^{j60^\circ} = I_a + jI_p = 2,5 + j4,33.$$

Комплексное напряжение из алгебраической формы  $\underline{U} = U_a - jU_p$  можно перевести в показательную форму записи:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_U},$$

где  $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$  — модуль комплексного напряжения, равный его действительному значению;

$\psi_U = \text{arctg} \frac{U_p}{U_a}$  — аргумент, равный начальному фазовому углу.

В результате при  $\underline{U} = 190,5 - j110$  получим выражение

$$\underline{U} = \sqrt{190,5^2 - 110^2} e^{j \cdot \arctg \frac{-110}{190,5}} = 220 e^{-j30^\circ}.$$

Если известна частота тока  $f$  в цепи, то легко осуществить переход от аналитической формы представления синусоидальной электрической величины к комплексной, и наоборот. Например, если напряжение в цепи задано аналитическим выражением  $u = 311 \sin(628t - 30^\circ)$ , то параметры этого синусоидального напряжения будут равны:

амплитуда  $U_m = 311$  В;

действующее значение  $U = 311 / \sqrt{2} = 220$  В;

частота тока  $f = 628 / 2\pi = 100$  Гц;

начальная фаза  $\psi_U$  равна  $30^\circ$ .

В свою очередь комплексное напряжение в показательной форме —

$$\underline{U} = 220 e^{j30^\circ};$$

комплексное напряжение в алгебраической форме —

$$\underline{U} = 220 \cdot \cos 30^\circ + j220 \cdot \sin 30^\circ = 190,5 + j110.$$

### Пример решения задачи

В цепи переменного тока (рис. 2.15) известны величины:  $U = 230$  В,  $R_1 = 14$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 14$  Ом,  $X_{L1} = 11$  Ом,  $X_{C1} = 10$  Ом,  $X_{L2} = 12$  Ом,  $X_{C2} = 7$  Ом. Определить токи и напряжения на всех элементах, коэффициент мощности. Определить активную, реактивную и полную мощности цепи, составить баланс мощностей. Построить векторную диаграмму.

**Решение.** Полное сопротивление первого неразветвленного участка (Ом) определим по выражению

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = 14 + j(11 - 10) = 14 + j1 = 14e^{j4,1^\circ};$$

полное сопротивление второго разветвлённого участка и его ветвей —

$$\underline{Z}_{21} = R_2 - jX_{C2} = 10 - j7 = 12,2e^{-j35^\circ};$$

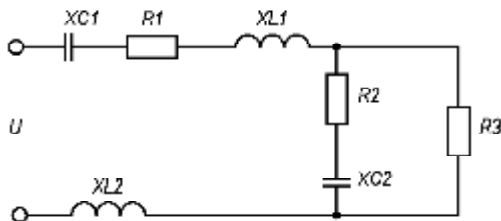


Рисунок 2.15

$$\underline{Z}_{22} = R_3 = 14;$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{21} \cdot \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22}} = \frac{(10 - j7)14}{(10 - j7) + 14} = 6,474 - j2,195 = 6,84e^{-j18,7^\circ};$$

полное сопротивление третьего неразветвлённого участка —

$$\underline{Z}_3 = jX_{L2} = j12 = 12e^{90^\circ}.$$

полное  $\underline{Z}$ , активное  $R$  и реактивное  $X$  сопротивления цепи —

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 14 + j1 + 6,47 - j2,2 + j12 = \\ &= 20,47 + j10,8 = 23,15e^{j27,8^\circ}; \end{aligned}$$

$$R = 20,47 \text{ Ом};$$

$$X = 10,8 \text{ Ом};$$

коэффициент мощности цепи —

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20,47}{23,15} = 0,884;$$

угол сдвига фаз между напряжением и током источника —

$$\varphi = 27,8^\circ;$$

ток источника, равный току первого и третьего участков (А) —

$$\underline{I} = \underline{I}_1 = \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{190}{23,15e^{j27,8^\circ}} = 9,935e^{-j27,8^\circ} = 8,787 - j4,64;$$

напряжение на первом и третьем участках и их элементах (B) —

$$\underline{U}_1 = \underline{I} Z_1 = (8,787 - j4,64)(14 + j1) = 127,65 - j56,13 = 139,4e^{-j23,7^\circ};$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I} Z_3 = (8,787 - j4,64)(0 + j12) = 55,65 + j105,44 = 119,2e^{j62,2^\circ};$$

$$\underline{U}_{C1} = \underline{I} jX_{C1} = (8,787 - j4,64)(-j10) = -46,37 - j87,87 = 99,35e^{j62,2^\circ};$$

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I} R_1 = (8,787 - j4,64)14 = 123 - j64,9 = 139,1e^{-j27,8^\circ};$$

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I} jX_{L1} = (8,787 - j4,64)j11 = 51,01 + j96,65 = 109,3e^{j62,2^\circ};$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{I} jX_{L2} = (8,787 - j4,64)j12 = 55,65 + j105,4 = 119,2e^{j62,2^\circ};$$

напряжение на разветвлённом участке (B) —

$$\underline{U}_2 = \underline{U} - \underline{U}_1 - \underline{U}_3 = 46,7 - j49,3 = 67,9e^{-j46,6^\circ};$$

сила тока на ветвях разветвлённого участка (A) —

$$\underline{I}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{Z_{21}} = \frac{67,9e^{-j46,5^\circ}}{12,2e^{-j35^\circ}} = 5,56e^{-j11,6^\circ} = 5,45 - j1,11;$$

$$\underline{I}_{22} = \frac{\underline{U}_2}{Z_{22}} = \frac{67,9e^{-j46,5^\circ}}{14} = 4,85e^{-j46,5^\circ} = 3,34 - j3,52;$$

напряжение на элементах разветвлённого участка (B) —

$$\underline{U}_{R2} = \underline{I}_{21} R_2 = (5,45 - j1,11)10 = 54,5 - j11,1 = 55,64e^{-j11,6^\circ};$$

$$\underline{U}_{C2} = \underline{I}_{21} (-jX_{C2}) = (5,45 - j1,11)(-j7) = -7,81 - j38,16 = 38,95e^{j78,4^\circ};$$

$$\underline{U}_{R3} = \underline{U}_3 = 55,65 + j105,44 = 119,2e^{j62,2^\circ};$$

полная мощность источника (B · A) —

$$S_{\text{ист}} = \underline{U} I^* = 190 \cdot 9,935e^{j27,8^\circ} = 2285e^{j27,8^\circ} = 2021 + j1067,$$

где  $I^*$  — обращённый комплексный ток, A.

Следовательно, активная мощность источника  $P_{ист}$  равна 2 021 Вт, реактивная мощность  $Q_{ист}$  равна 1 067 вар.

Активная  $P_{пр}$  (Вт), реактивная  $Q_{пр}$  (вар) и полная  $Z_{пр}$  (В · А) мощности приёмников соответственно равны:

$$P_{пр} = I_1^2 R_1 + I_{21}^2 R_2 + I_{22}^2 R_3 = 9,935^2 \cdot 14 + 5,56^2 \cdot 10 + 4,85^2 \cdot 14 = 2\,021;$$

$$Q_{пр} = I_1^2 X_{L1} - I_{21}^2 X_{C1} - I_{21}^2 X_{C2} + I_3^2 X_{L2} =$$

$$= 9,935^2 \cdot 11 - 9,935^2 \cdot 10 - 5,56^2 \cdot 7 + 9,935^2 \cdot 12 = 1\,067;$$

$$S_{пр} = \sqrt{P_{пр}^2 + Q_{пр}^2} = \sqrt{2\,021^2 + 1\,067^2} = 2\,285.$$

Построение векторной диаграммы цепи (рис. 2.16) выполняем в масштабах тока  $m_I$  и напряжения  $m_U$  согласно векторным уравнениям, составленным по первому и второму законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3; \\ \dot{U}_1 &= \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{L1}; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_{R3} = \dot{U}_{R2} + \dot{U}_{C2}; \\ I &= I_1 = I_3 = I_{21} + I_{22}. \end{aligned}$$

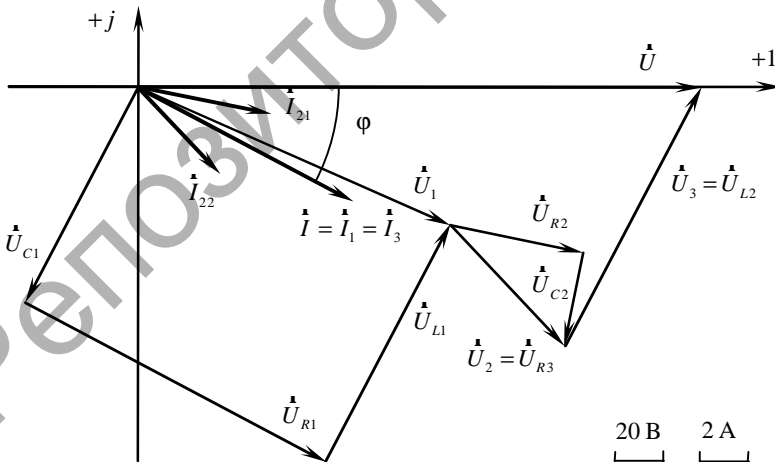


Рисунок 2.16

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.13.** Для заданного мгновенного значения тока  $i$  определить амплитудное и действующее значение, частоту и начальную фазу. Записать выражения для комплексного действующего значения в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, используя исходные данные таблицы 2.13.

**Задача 2.14.** Для заданного значения силы тока  $\dot{I}$  в комплексном виде и частоты тока  $f$  определить амплитудное, действующее значение и начальную фазу тока. Записать комплексное значение тока в алгебраической форме, а также аналитическое выражение мгновенного значения силы тока, используя исходные данные таблицы 2.14.

**Задача 2.15.** При напряжении источника  $u$  и силе тока приёмника  $i$  в неразветвлённой цепи однофазного переменного тока определить амплитудные и действующие значения напряжения и тока, частоту тока, начальные фазы напряжения и тока, сдвиг фаз между током и напряжением. Вычислить активную, реактивную и полную мощность цепи, используя исходные данные таблицы 2.15.

Т а б л и ц а 2.13

Вариант	$i, A$	Вариант	$i, A$
1	$i = 3 \sin(314t + 20^\circ)$	6	$i = 5 \sin(314t - 20^\circ)$
2	$i = 5 \sin(628t + 40^\circ)$	7	$i = 6 \sin(628t - 40^\circ)$
3	$i = 2 \sin(314t - 10^\circ)$	8	$i = 7 \sin(314t + 30^\circ)$
4	$i = 4 \sin(1256t - 30^\circ)$	9	$i = 8 \sin(1256t - 25^\circ)$
5	$i = 3 \sin(628t + 10^\circ)$	10	$i = 9 \sin(628t - 10^\circ)$

Т а б л и ц а 2.14

Вариант	$\dot{I}, A$	$f, \text{Гц}$	Вариант	$\dot{I}, A$	$f, \text{Гц}$
1	$3e^{j20^\circ}$	50	6	$5e^{-j20^\circ}$	60
2	$5e^{-j40^\circ}$	60	7	$6e^{-j40^\circ}$	100

Окончание табл. 2.14

Вариант	$\underline{I}, A$	$f, \text{Гц}$	Вариант	$\underline{I}, A$	$f, \text{Гц}$
3	$2e^{j3^\circ}$	100	8	$7e^{j30^\circ}$	200
4	$4e^{-j30^\circ}$	200	9	$8e^{-j25^\circ}$	50
5	$3e^{j10^\circ}$	50	10	$9e^{-j10^\circ}$	60

Т а б л и ц а 2.15

Вариант	$u, \text{В}$	$i, \text{А}$
1	$311 \sin(314t + 30^\circ)$	$3 \sin(314t + 20^\circ)$
2	$539 \sin(628t - 20^\circ)$	$5 \sin(628t + 40^\circ)$
3	$180 \sin(314t + 10^\circ)$	$2 \sin(314t - 10^\circ)$
4	$311 \sin(1256t)$	$4 \sin(1256t - 30^\circ)$
5	$180 \sin(628t + 40^\circ)$	$3 \sin(628t + 10^\circ)$
6	$258 \sin(314t + 10^\circ)$	$6 \sin(314t + 20^\circ)$
7	$539 \sin(628t - 40^\circ)$	$5 \sin(628t + 30^\circ)$
8	$180 \sin(314t + 30^\circ)$	$5 \sin(314t - 10^\circ)$
9	$311 \sin(942t)$	$3 \sin(942t - 20^\circ)$
10	$180 \sin(628t + 50^\circ)$	$4 \sin(628t + 40^\circ)$

**Задача 2.16.** Вычислить и записать мгновенное значение напряжения и тока в цепи (рис. 2.17). Определить угол сдвига фаз и характер нагрузки в цепи, а также активную, реактивную и полную мощности, используя исходные данные таблицы 2.16.

**Задача 2.17.** Определить токи в ветвях цепи, напряжения на участках  $AB$  и  $BC$ ; активную, реактивную и полную мощности цепи (рис. 2.18), используя исходные данные таблицы 2.17.

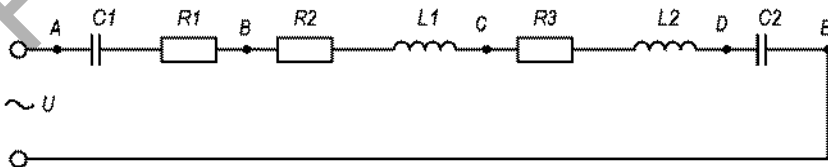
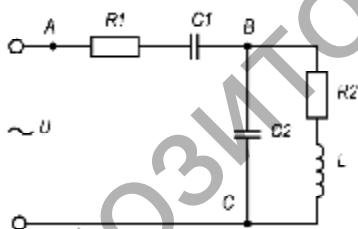


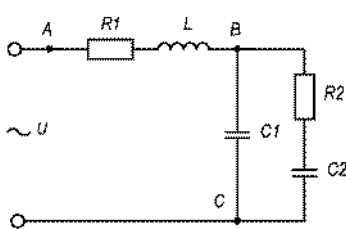
Рисунок 2.17

Т а б л и ц а 2.16

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U$ , В	220	220	127	127	110	—	—	—	—	—
$I$ , А	—	—	—	—	—	1	2	3	4	5
$f$ , Гц	50	100	50	100	50	100	50	100	50	100
$\psi$ , град	0	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$R_1$ , Ом	18	0	16	15	0	14	12	0	14	14
$R_2$ , Ом	0	18	9	0	11	14	0	10	11	0
$R_3$ , Ом	15	16	0	8	19	0	17	18	0	22
$X_{L1}$ , Ом	20	18	16	14	12	0	16	10	14	0
$X_{L2}$ , Ом	18	0	22	14	12	20	18	0	10	11
$X_{C1}$ , Ом	0	14	8	12	16	14	15	0	17	16
$X_{C2}$ , Ом	14	12	8	0	18	12	10	11	0	0



а)



б)

Рисунок 2.18

Т а б л и ц а 2.17

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$U$ , В	110	110	220	220	380	380	440	440	660	660
$R_1$ , Ом	50	60	70	80	90	40	50	60	50	60

Окончание табл. 2.17

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$X_{C1}$ , Ом	30	40	50	60	70	70	80	90	30	40
$R_2$ , Ом	40	50	60	70	80	50	60	70	40	50
$X_{L2}$ , Ом	70	60	50	40	30	40	50	60	50	60
$X_{C2}$ , Ом	30	40	50	60	70	50	60	70	60	50

**Задача 2.18.** В электрической цепи (рис. 2.19) известно напряжение на входе цепи  $U = 100$  В и параметры элементов:  $R_1 = 40$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом,  $C_1 = 15$  мкФ,  $C_2 = 15$  мкФ,  $L_1 = 1$  мГн,  $L_2 = 0,5$  мГн. Частота сети питания 50 Гц. Определить токи во всех ветвях цепи, используя исходные данные таблицы 2.18.

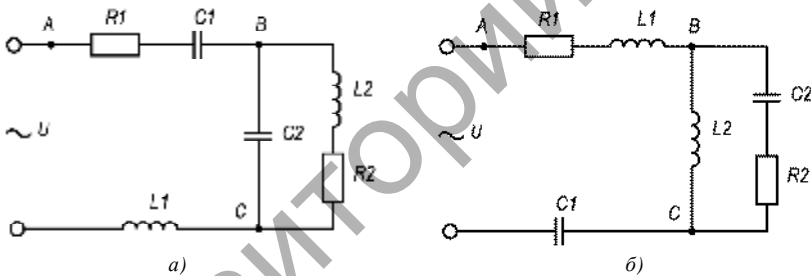


Рисунок 2.19

Т а б л и ц а 2.18

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$U$ , В	110	110	220	220	380	380	440	440	660	660
$R_1$ , Ом	50	60	70	80	90	40	50	60	50	60
$R_2$ , Ом	40	40	50	50	60	60	70	70	80	80
$C_1$ , мкФ	50	55	60	65	70	70	65	60	55	50
$C_2$ , мкФ	30	25	20	15	10	10	15	20	25	30

Окончание табл. 2.18

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$L_1$ , мГн	40	50	60	50	60	40	50	60	50	60
$L_1$ , мГн	70	60	50	40	30	40	50	60	50	60

**Задача 2.19.** В сеть с напряжением  $U = U_m \sin(314t + \varphi)$  включена цепь (рис. 2.20), состоящая из смешанного соединения элементов. Рассчитать значения ёмкостей и индуктивностей элементов цепи. Определить токи во всех ветвях, ток источника, полную, активную и реактивную мощности всей цепи. Записать выражение для мгновенного тока неразветвлённой части цепи. Построить в масштабе векторную диаграмму, используя исходные данные таблицы 2.19.

**Задача 2.20.** Составить схему замещения цепи (рис. 2.21) и определить значения активного, индуктивного и ёмкостного сопротивлений её элементов. Вычислить выходное напряжение  $U_{\text{вых}}$  при входном напряжении  $U_{\text{вх}} = 20$  В, и частоте тока  $f$ . Записать аналитические выражения для входного и выходного напряжений, используя исходные данные таблицы 2.20.

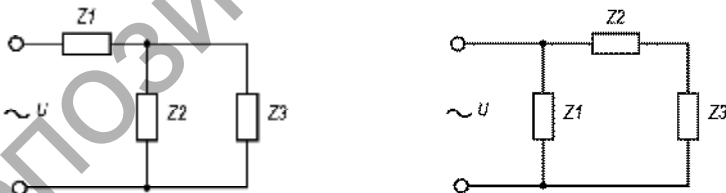


Рисунок 2.20

Т а б л и ц а 2.19

Вариант	Схема	$U_m$ , В	$\varphi_U$	$Z_1$ , Ом	$Z_2$ , Ом	$Z_3$ , Ом
1	а	110	+90°	$40 + j30$	$40 - j30$	$10 + j20$
2	б	120	+80°	$30 - j50$	$30 + j40$	$20 + j30$

Окончание табл. 2.19

Вариант	Схема	$U_m, В$	$\varphi_U$	$Z_1, Ом$	$Z_2, Ом$	$Z_3, Ом$
3	а	130	$+70^\circ$	$20 + j40$	$-j20$	$30 + j40$
4	б	140	$+60^\circ$	$10 - j20$	$10 + j60$	$40 + j50$
5	а	150	$+50^\circ$	$j20$	$20 - j50$	$50 + j60$
6	б	160	$+40^\circ$	$40 - j30$	$40 + j30$	$60 - j50$
7	а	170	$+30^\circ$	$30 + j40$	$-j50$	$50 - j40$
8	б	180	$+20^\circ$	$20 - j50$	$20 + j40$	$40 - j30$
9	а	190	$+10^\circ$	$10 + j60$	$10 - j20$	$30 - j20$
10	б	200	$0^\circ$	$-j20$	$20 + j20$	$20 - j10$

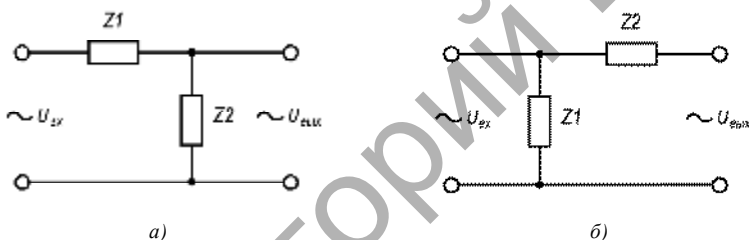


Рисунок 2.21

Т а б л и ц а 2.20

Вариант	Схема	$f, Гц$	$Z_1, Ом$	$Z_2, Ом$
1	а	50	$-j20$	$17,3 + j10$
2	б	50	$-j34,6$	$10 + j17,3$
3	а	100	$-j10$	$20 + j34,6$
4	б	100	$10 - j69,2$	$20 + j17,3$
5	а	150	$10 - j34,6$	$17,3 + j17,3$
6	б	150	$j20$	$17,3 - j10$
7	а	200	$j34,6$	$10 - j17,3$

Окончание табл. 2.20

Вариант	Схема	$f$ , Гц	$Z_1$ , Ом	$Z_2$ , Ом
8	б	200	$j10$	$20 - j34,6$
9	а	400	$10 + j69,2$	$20 - j17,3$
10	б	400	$10 + j34,6$	$17,3 - j17,3$

**Задача 2.21.** Определить активное и индуктивное сопротивления однофазного двигателя, включённого в сеть с напряжением  $U$  и потребляющего ток  $I$  при коэффициенте мощности  $\cos \varphi$ . Записать сопротивление, силу тока и мощность двигателя в комплексном виде, используя исходные данные таблицы 2.21.

Т а б л и ц а 2.21

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U$ , В	110	110	127	127	220	220	380	380	440	440
$I$ , А	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\cos \varphi$	0,64	0,71	0,67	0,75	0,72	0,73	0,82	0,77	0,69	0,75

## 3 РАСЧЁТ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 3.1 Расчёт четырёхпроводных трёхфазных цепей

При заданных значениях линейного  $U_{\text{л}}$  или фазного  $U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} / \sqrt{3}$  напряжения необходимо определить токи фаз, значение тока в нейтральном проводе, а также активные, реактивные и полные мощности фазных нагрузок и трёхфазного приёмника в целом.

Следует учитывать, что каждая отдельно взятая фаза с нейтральным проводом представляет собой однофазную цепь синусоидального тока. В зависимости от способа соединения элементов цепи, включённых в каждую из фаз, могут быть использованы все методы расчёта однофазных цепей переменного синусоидального тока.

Мгновенное значение тока в нейтральном проводе определяется как алгебраическая сумма фазных токов по формуле

$$i_N = i_A + i_B + i_C.$$

Активная, реактивная и полная мощности трёхфазного приёмника определяются как сумма соответствующих мощностей, включённых во все фазы приёмника.

#### Пример решения задачи

Дано:  $U_{\text{л}} = 36 \text{ В}$ ,  $R_A = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_B = 16 \text{ Ом}$ ,  $X_{LC} = 30 \text{ Ом}$ ,  $X_{CA} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{CC} = 9 \text{ Ом}$ . Определить фазные токи, ток в нейтральном проводе, активную, реактивную и полную мощности каждой фазы и всей цепи, угол сдвига фаз между током и напряжением в каждой фазе. Начертить в масштабе векторную диаграмму цепи.

**Решение.** Составляем схему цепи с соединением приёмников в звезду с нейтралью и обозначаем направления фазных токов (рис. 3.1).

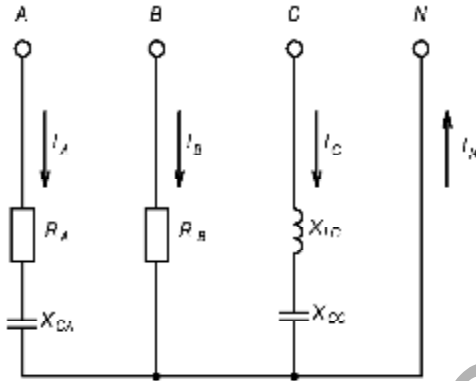


Рисунок 3.1

Фазное напряжение определяем по формуле

$$U_{\phi} = U_{л} / \sqrt{3} = 36 / \sqrt{3} = 21 \text{ В.}$$

Полные сопротивления фаз вычисляем следующим образом:

$$Z_A = \sqrt{R_A^2 + X_{CA}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ Ом;}$$

$$Z_B = R_B = 16 \text{ Ом;}$$

$$Z_C = \sqrt{(X_{LC} - X_{CC})^2} = 30 - 9 = 21 \text{ Ом.}$$

Определяем токи фаз по закону Ома:

$$I_A = U_{\phi} / Z_A = 21 / 10 = 2,1 \text{ А;}$$

$$I_B = U_{\phi} / Z_B = 21 / 16 = 1,3 \text{ А;}$$

$$I_C = U_{\phi} / Z_C = 21 / 21 = 1 \text{ А.}$$

Углы сдвига фаз вычисляем по формулам

$$\varphi_A = \arctg \frac{X_{LA} - X_{CA}}{R_A} = \arctg \frac{-8}{6} = -53^{\circ};$$

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \frac{X_{LB} - X_{CB}}{R_B} = 0^\circ;$$

$$\varphi_C = \operatorname{arctg} \frac{X_{LC} - X_{CC}}{R_C} = \operatorname{arctg} \frac{30-9}{0} = 90^\circ.$$

Для построения векторной диаграммы (рис. 3.2) принимаем масштаб тока  $m_I$  и масштаб напряжений  $m_U$ . Измерим длину вектора  $\dot{I}_N$  и с учётом масштаба получим значение тока в нейтральном проводе  $I_N$ , равное 1,8 А.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.1.** Определить фазные токи, ток в нейтрали, мощности фаз и трёхфазной нагрузки при включении лампочек номинальной мощностью  $P_{\text{ном}}$  и номинальным напряжением  $U_{\text{ном}}$  в сеть с линейным напряжением  $U_{\text{л}}$  (рис. 3.3). Построить векторную диаграмму токов и напряжений, используя исходные данные таблицы 3.1.

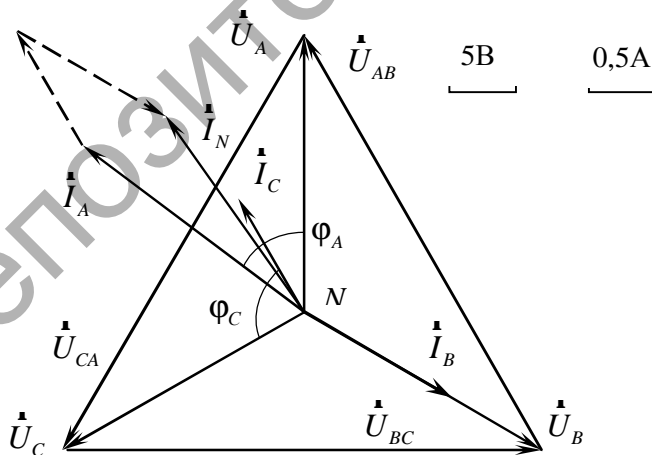


Рисунок 3.2

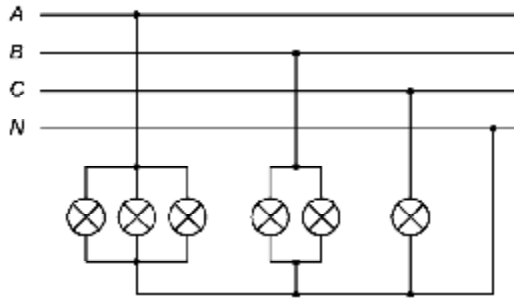


Рисунок 3.3

Т а б л и ц а 3.1

Вариант	$U_{\text{л}}, \text{В}$	$P_{\text{ном}}, \text{Вт}$	$U_{\text{ном}}, \text{В}$
1	220	40	215...235
2	220	60	210...245
3	380	100	215...235
4	380	150	210...245
5	127	40	215...235
6	220	60	210...245
7	220	100	215...235
8	380	150	210...245
9	380	40	215...235
10	1 270	60	210...245

**Задача 3.2.** Определить линейное и фазное напряжения, фазные токи, ток в нулевом проводе, активную, реактивную и полную мощности каждой фазы и всей трёхфазной цепи (рис. 3.4), а также угол сдвига фаз между током и напряжением в каждой фазе, используя исходные данные таблицы 3.2.

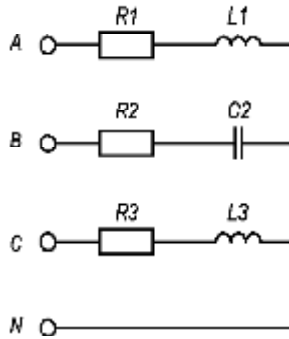


Рисунок 3.4

Т а б л и ц а 3.2

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{л}, В$	220	—	—	—	380	—	—	—	660	—
$U_{ф}, В$	—	127	—	—	—	220	—	—	—	380
$I_1, А$	—	—	1,0	—	—	—	1,8	—	—	—
$I_2, А$	—	—	—	1,5	—	—	—	2,0	—	—
$R_1, Ом$	100	120	140	160	180	160	180	220	120	140
$R_2, Ом$	80	120	160	180	220	180	140	160	120	160
$R_3, Ом$	100	120	180	140	160	180	140	160	120	180
$X_{L1}, Ом$	100	120	180	140	160	100	120	160	120	160
$X_{C2}, Ом$	80	120	160	180	220	80	120	160	120	140
$X_{L3}, Ом$	100	120	140	160	180	100	120	220	120	180

**Задача 3.3.** Составить схему замещения цепи (рис. 3.5). Определить фазные токи, ток в нейтральном проводе, углы сдвига фаз, активную, реактивную и полную мощности трёхфазной нагрузки, используя исходные данные таблицы 3.3.

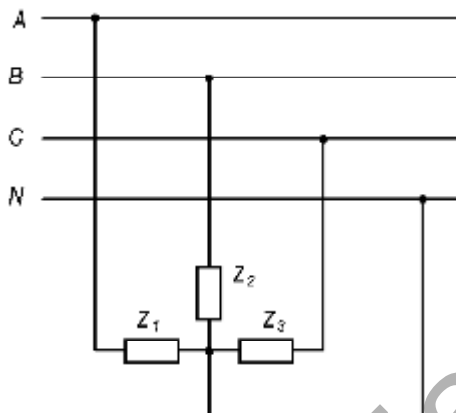


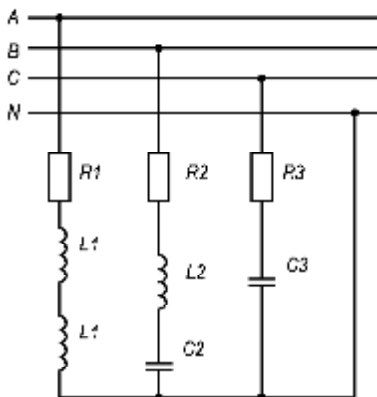
Рисунок 3.5

Т а б л и ц а 3.3

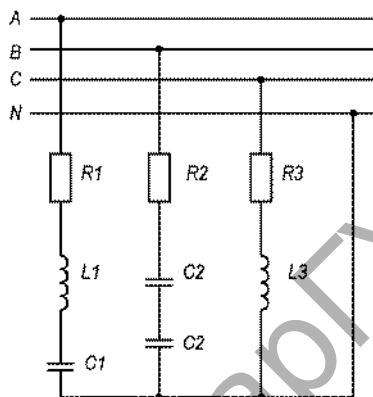
Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{\text{л}}, \text{В}$	220	220	380	380	660	220	220	380	380	660
$Z_1, \text{Ом}$	50	$j60$	70	80	$-j90$	$j90$	80	70	$j60$	50
$Z_2, \text{Ом}$	$-j20$	30	$j40$	30	$j20$	50	$j60$	$-j70$	80	$j90$
$Z_3, \text{Ом}$	$j90$	80	70	$j60$	50	$-j20$	$-j30$	40	$j30$	$-j20$

**Задача 3.4.** Определить фазные токи, ток в нейтральном проводе, активную, реактивную и полную мощности и коэффициент мощности трёхфазной нагрузки (рис. 3.6), используя исходные данные таблицы 3.4.

**Задача 3.5.** Составить схему цепи. Определить фазные токи, ток в нейтральном проводе, активную, реактивную и полную мощности и коэффициент мощности трёхфазной нагрузки (рис. 3.7), используя исходные данные таблицы 3.5.



a)



б)

Рисунок 3.6

Т а б л и ц а 3.4

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$U_{\text{л}}, \text{В}$	220	—	380	—	660	—	220	—	380	—
$U_{\text{ф}}, \text{В}$	—	220	—	380	—	220	—	380	—	127
$R_1, \text{Ом}$	50	60	70	80	90	20	30	40	30	20
$X_{L1}, \text{Ом}$	20	30	40	30	20	50	60	70	80	90
$X_{C1}, \text{Ом}$	0	50	0	30	0	20	0	60	0	80
$R_2, \text{Ом}$	90	80	70	60	50	20	20	20	40	30
$X_{L2}, \text{Ом}$	20	0	20	0	30	0	80	0	60	0
$X_{C2}, \text{Ом}$	70	60	70	80	70	60	50	40	30	20
$R_3, \text{Ом}$	60	50	40	30	20	50	40	30	40	20
$X_{L3}, \text{Ом}$	0	40	0	40	0	70	0	70	0	70
$X_{C3}, \text{Ом}$	20	0	40	0	90	0	70	0	50	0

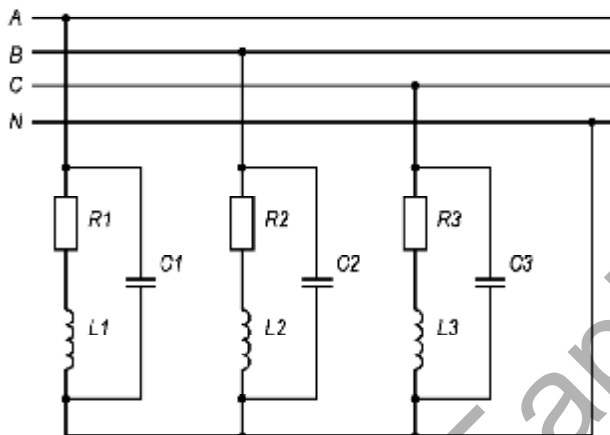


Рисунок 3.7

Т а б л и ц а 3.5

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_n$ , В	220	220	380	380	660	220	220	380	380	660
$R_1$ , Ом	50	60	70	80	90	0	30	40	30	20
$X_{L1}$ , Ом	20	0	40	30	0	50	60	70	80	0
$X_{C1}$ , Ом	0	30	0	60	0	20	0	0	0	0
$R_2$ , Ом	90	80	70	0	50	20	20	20	40	30
$X_{L2}$ , Ом	20	0	20	40	30	0	80	0	60	50
$X_{C2}$ , Ом	0	60	70	0	70	60	0	40	30	20
$R_3$ , Ом	60	50	0	30	20	50	0	30	0	0
$X_{L3}$ , Ом	0	0	40	40	0	0	40	0	40	20
$X_{C3}$ , Ом	50	40	0	0	20	70	60	70	0	70

### 3.2 Расчёт трёхпроводных трёхфазных цепей со схемой «звезда»

Выбор метода расчёта трёхпроводной трёхфазной цепи со схемой соединения фаз «звезда» зависит от вида нагрузки.

При симметричном приёмнике достаточно по одному из методов расчёта однофазных цепей определить фазные токи и напряжения, которые будут одинаковыми для каждой фазы. Алгоритм расчёта цепи аналогичен расчёту четырёхпроводной симметричной цепи, при этом на основе первого закона Кирхгофа соотношение между фазными токами для нейтральной точки приёмника следующее:

в векторном виде —

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0;$$

в комплексном виде —

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

В случае несимметричной нагрузки оптимальным методом расчёта является комплексный метод, так как возникает необходимость определения напряжения смещения нейтрали  $U_{N,N}$  по методу двух узлов и затем — фазных напряжений приёмника  $U_a$ ,  $U_b$  и  $U_c$ .

#### Пример решения задачи

Для трёхфазного приёмника (рис. 3.8) известны значения сопротивлений:  $R_1 = 20$  Ом;  $R_2 = 30$  Ом;  $R_3 = 40$  Ом;  $X_{L1} = 10$  Ом;  $X_{L2} = 40$  Ом;  $X_{L3} = 30$  Ом;  $X_{C1} = 30$  Ом;  $X_{C2} = 20$  Ом;  $X_{C3} = 50$  Ом. Линейное напряжение сети  $U_{\text{л}} = 380$  В. Определить токи и мощности фаз, мощности трёхфазной нагрузки.

**Решение.** Фазное напряжение источника вычисляем по выражению

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} / \sqrt{3} = 220 \text{ В};$$

напряжения фаз источника в комплексном виде —

$$\dot{U}_A = U_{\text{ф}} e^{j0^\circ} = 220 + j0;$$

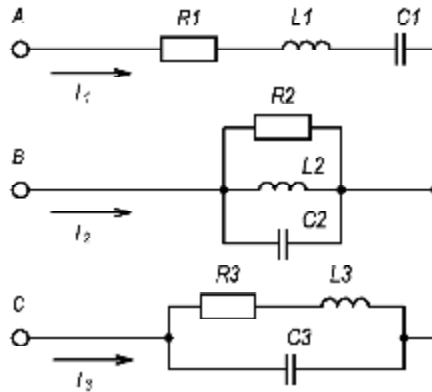


Рисунок 3.8

$$\underline{U}_B = U_\Phi e^{-j120^\circ} = -110 - j190,5;$$

$$\underline{U}_C = U_\Phi e^{j120^\circ} = 110 - j190,5;$$

полные сопротивления фаз в комплексном виде —

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = 20 - j20 = 28,3e^{-j45^\circ};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = 19,2 + j14,4 = 24e^{j36,9^\circ};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{(R_3 + jX_{L3})(-jX_{C3})}{(R_3 + jX_{L3}) + (-jX_{C3})} = 50 - j25 = 55,9e^{-j26,6^\circ};$$

полные проводимости фаз 1 и 3 в комплексном виде —

$$\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1 = 0,025 + j0,025 = 0,035e^{j45^\circ};$$

$$\underline{Y}_3 = 1/\underline{Z}_3 = 0,016 + j0,008 = 0,018e^{j26,6^\circ};$$

полная проводимость фазы 2 —

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + j\left(\frac{1}{X_{L2}} - \frac{1}{X_{C2}}\right) = 0,033 - j0,025 = 0,042e^{-j37,9^\circ};$$

напряжение смещения нейтрали (напряжение между нейтральными точками источника и приёмника) —

$$U_{N_1N} = \frac{U_{1\underline{Y}_1} + U_{2\underline{Y}_2} + U_{3\underline{Y}_3}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = -76,818 + j63 = 99,3e^{-j39,3^\circ};$$

напряжения фаз приёмника —

$$U_1 = U_A - U_{N_1N} = 296,8 - j63 = 303,4e^{-j12^\circ};$$

$$U_2 = U_B - U_{N_1N} = -33,2 - j253,5 = 255,7e^{j82,5^\circ};$$

$$U_3 = U_C - U_{N_1N} = -33,2 + j127,5 = 131,8e^{-j75,4^\circ};$$

токи фаз —

$$I_1 = U_1 Y_1 = 8,99 + j5,85 = 10,7e^{j33^\circ};$$

$$I_2 = U_2 Y_2 = -7,44 - j7,62 = 10,6e^{j45,7^\circ};$$

$$I_3 = U_3 Y_3 = -1,55 + j1,77 = 2,36e^{-j48,8^\circ};$$

полные мощности фаз —

$$S_1 = U_1 I_1^* = (296,8 - j63)(8,99 - j5,85) = 2303 - j2302 = 3255e^{-j45^\circ};$$

$$S_2 = U_2 I_2^* = (-33,2 - j253,5)(-7,44 + j7,62) = 2179 + j1634 = 2724e^{j36,9^\circ};$$

$$S_3 = U_3 I_3^* = (-33,2 + j127,5)(-1,55 - j1,77) = 278 - j139 = 311e^{-j26,6^\circ};$$

активная и реактивная мощности трёхфазного приёмника —

$$P = 2303 + 2179 + 278 = 4760 \text{ Вт};$$

$$Q = -2303 + 1634 - 139 = -808 \text{ вар};$$

полная мощность трёхфазного приёмника —

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{4760^2 + (-808)^2} = 4826 \text{ В} \cdot \text{А};$$

коэффициент мощности трёхфазного приёмника —

$$\cos \varphi = P / S = 0,986.$$

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.6.** Определить отклонение напряжения от номинального значения на всех фазах приёмника в случае обрыва линейного провода в трёхфазной цепи (рис. 3.9), используя исходные данные таблицы 3.6.

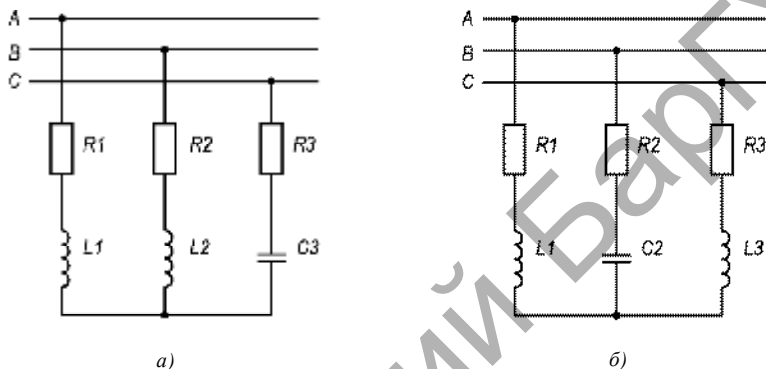


Рисунок 3.9

Т а б л и ц а 3.6

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$U_n$ , В	220	220	380	380	660	220	220	380	380	660
$R_1$ , Ом	50	60	70	80	90	20	30	40	30	20
$X_{L1}$ , Ом	20	30	40	30	20	50	60	70	80	90
$R_2$ , Ом	90	80	70	60	50	20	20	20	40	30
$X_{L2}$ , Ом	20	—	20	—	30	—	80	—	60	—
$X_{C2}$ , Ом	—	60	—	80	—	60	—	40	—	20
$R_3$ , Ом	60	50	40	30	20	50	40	30	40	20
$X_{L3}$ , Ом	—	20	—	40	—	90	—	70	—	50
$X_{C3}$ , Ом	50	—	30	—	20	—	60	—	80	—

**Задача 3.7.** Составить схему замещения цепи (рис. 3.10). Определить фазные напряжения и токи, активную, реактивную, полную мощности. Построить векторную диаграмму напряжений и токов, используя исходные данные таблицы 3.7.

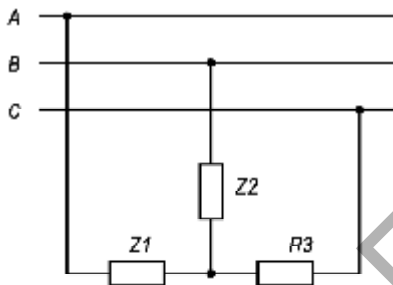


Рисунок 3.10

Т а б л и ц а 3.7

Вариант	$U_n, \text{В}$	$Z_1, \text{Ом}$	$Z_2, \text{Ом}$	$Z_3, \text{Ом}$
1	220	$50 + j20$	$20 + j10$	60
2	220	$60 - j10$	$30 - j20$	$80 - j40$
3	380	$70 + j30$	$40 + j30$	$70 - j20$
4	380	$80 + j10$	$30 - j20$	$60 + j40$
5	660	90	$20 - j10$	$50 + j30$
6	660	$20 + j10$	$j70$	$60 - j10$
7	220	$30 - j20$	$80 - j20$	$70 + j30$
8	220	$40 + j30$	$70 - j30$	$80 + j10$
9	380	$40 + j30$	$70 - j70$	30
10	380	$30 - j20$	$60 + j40$	$20 - j10$

### 3.3 Расчёт трёхпроводных трёхфазных цепей со схемой «треугольник»

Так как фазы приёмника при схеме соединения в треугольник питаются линейным напряжением сети, то работа каждой из фаз не зависит от других как при симметричном, так и при несимметричном приёмнике.

Для расчёта цепи на практике применяется графоаналитический метод, согласно которому аналитически определяются значения фазных токов и мощностей и графически (с помощью векторной диаграммы) — значения линейных токов. Более точные результаты обеспечивает символический метод расчёта (с помощью комплексных чисел).

Порядок расчёта цепи графоаналитическим методом следующий.

Ток  $i$ -й фазы определяется по закону Ома:

$$I_i = \frac{U_i}{Z_i},$$

где  $U_i$  — напряжение  $i$ -й фазы, равное соответствующему линейному напряжению сети;

$Z_i$  — полное сопротивление фазы, рассчитываемое по формуле  $Z_i = \sqrt{R_i^2 + (X_{Li}^2 - X_{Ci}^2)}$ , где  $R_i$ ,  $X_{Li}$  и  $X_{Ci}$  — активное, индуктивное и ёмкостное сопротивления  $i$ -й фазы соответственно.

Сдвиг фаз между током и напряжением для  $i$ -й фазы определяется по формуле

$$\varphi_i = \arctg \frac{X_{Li} - X_{Ci}}{R_i}.$$

Для определения токов в линейных проводах строим топографическую диаграмму напряжений, совмещённую с векторной диаграммой токов. Каждый вектор фазного тока при этом откладываем под углом  $\varphi_i$  относительно соответствующего вектора фазного напряжения. Векторы токов в линейных проводах получим согласно следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} I_A &= I_{AB} - I_{CA}; \\ I_B &= I_{BC} - I_{AB}; \\ I_C &= I_{CA} - I_{BC}. \end{aligned}$$

Активная  $P_i$ , реактивная  $Q_i$  и полная  $S_i$  мощности  $i$ -й фазы определяются по формулам

$$\begin{aligned} P_i &= U_i I_i \cos \varphi_i; \\ Q_i &= U_i I_i \sin \varphi_i; \\ S_i &= U_i I_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2}. \end{aligned}$$

коэффициент мощности трёхфазной нагрузки  $\cos \varphi = P/S$ .

### Пример решения задачи

В трёхфазной цепи определить фазные и линейные токи, напряжения, построить векторную диаграмму, определить активную, реактивную и полную мощности цепи. Исходные данные: схема соединения — треугольник,  $U_n = 380$  В;  $R_{ab} = 10$ ;  $R_{bc} = 10$  Ом;  $R_{ca} = 8$  Ом;  $X_{ab} = 10$  Ом;  $X_{ca} = -10$  Ом.

**Решение.** Составляем схему цепи (рис. 3.11).

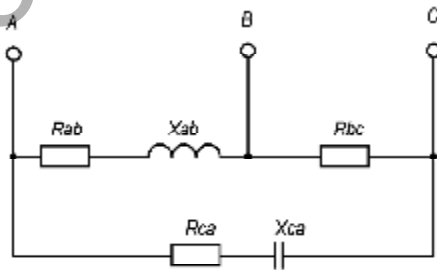


Рисунок 3.11

Задачу будем решать комплексным методом.

Напряжения фаз в комплексном виде (В) определяем по выражениям

$$\underline{U}_{ab} = 380e^{j0^\circ} = 380 + j0;$$

$$\underline{U}_{bc} = 380e^{-j120^\circ} = -190 - j329;$$

$$\underline{U}_{ca} = 380e^{j120^\circ} = -190 + j329;$$

полные сопротивления фаз  $\underline{Z}$  (Ом) —

$$\underline{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = 10 + j10 = 14,14e^{j45^\circ};$$

$$\underline{Z}_{bc} = R_{bc} = 10 + j0 = 10e^{j0^\circ};$$

$$\underline{Z}_{ca} = R_{ca} - jX_{ca} = 8 - j10 = 12,81e^{-j51,3^\circ};$$

фазные токи  $\underline{I}$  (А) —

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{380 + j0}{10 + j10} = 19 - j19 = 26,9e^{-j45^\circ};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{-190 - j329}{10 + j0} = 19 - j32,9 = 38e^{j60^\circ};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{-190 + j329}{8 - j10} = -29,3 + j4,46 = 29,7e^{-j8,6^\circ};$$

коэффициенты мощности фаз  $\cos \varphi$  —

$$\cos \varphi_{ab} = \frac{R_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{10}{14,14} = 0,707;$$

$$\cos \varphi_{bc} = \frac{R_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{10}{10} = 1;$$

$$\cos \varphi_{ca} = \frac{R_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{8}{12,8} = 0,625.$$

Получим углы сдвига фаз  $\varphi_{ab} = 45^\circ$ ;  $\varphi_{bc} = 0^\circ$ ;  $\varphi_{ca} = -51^\circ$ .

Линейные токи  $\underline{I}$  (А) определяем по выражениям

$$\begin{aligned}\underline{I}_a &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = (19 - j19) - (-29,33 + j4,46) = \\ &= 48,33 - j23,46 = 53,7 e^{-j25,9^\circ};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_b &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (-19 - j32,9) - (19 - j19) = \\ &= -38 - j13,9 = 40,4 e^{j20,1^\circ};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_c &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (-29,33 + j4,46) - (-19 - j32,9) = \\ &= -10,3 + j37,4 = 38,8 e^{-j74,5^\circ};\end{aligned}$$

мощности фаз  $\underline{S}$  (В · А) —

$$\underline{S}_{ab} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* = 380 \cdot (19 + j19) = 7\,220 + j7\,220;$$

$$\underline{S}_{bc} = \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* = (-190 - j329) \cdot (-19 + j32,9) = 14\,430 + j0;$$

$$\underline{S}_{ca} = \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = (-190 + j329) \cdot (-29,33 - j4,46) = 7\,041 - 8\,801j;$$

активная мощность нагрузки  $P$  (Вт) —

$$P = 7\,220 + 14\,430 + 7\,041 = 28\,700;$$

реактивная мощность нагрузки  $Q$  (вар) —

$$Q = 7\,220 - 8\,801 = -1\,581;$$

полная мощность нагрузки  $S$  (В · А) —

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{28\,700^2 + (-1\,581)^2} = 28\,740.$$

Векторную диаграмму (рис. 3.12) строим в масштабе тока  $m_I = 10$  А / см и масштабе напряжения  $m_U = 40$  В / см.

## Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.8.** Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную, полную мощности и коэффициент мощности трёхфазной нагрузки (рис. 3.13). Построить векторную диаграмму, используя исходные данные таблицы 3.8.

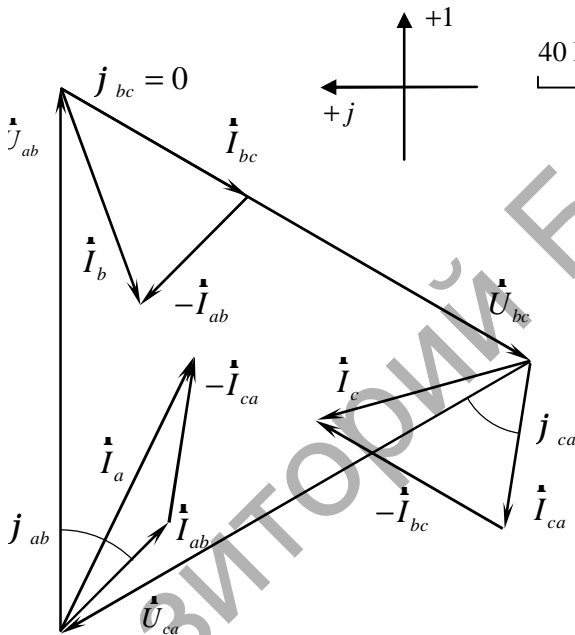


Рисунок 3.12

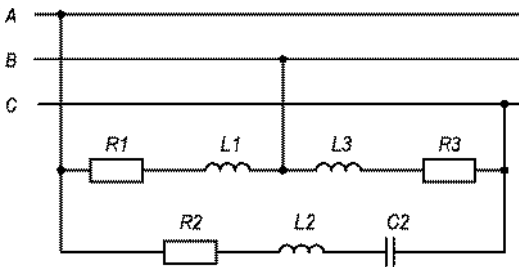


Рисунок 3.13

Т а б л и ц а 3.8

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_{\text{л}}, \text{В}$	220	220	380	380	660	220	220	380	380	660
$R_1, \text{Ом}$	50	60	70	80	90	70	30	20	20	30
$X_{L1}, \text{Ом}$	20	30	40	30	20	40	60	50	90	80
$R_2, \text{Ом}$	90	80	70	60	50	70	80	90	20	20
$X_{L2}, \text{Ом}$	20	20	20	40	30	70	60	50	70	60
$X_{C2}, \text{Ом}$	70	60	70	80	70	20	40	30	60	50
$R_3, \text{Ом}$	60	50	40	30	20	40	60	70	30	20
$X_{C3}, \text{Ом}$	50	40	30	40	20	30	50	40	60	50

**Задача 3.9.** Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную, полную мощности и коэффициент мощности трёхфазной нагрузки (рис. 3.14). Построить векторную диаграмму, используя исходные данные таблицы 3.8.

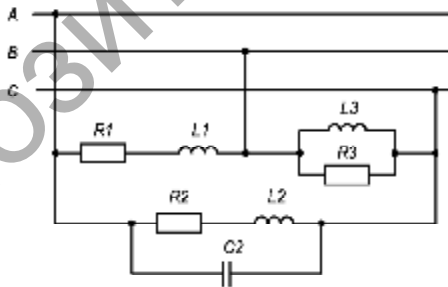


Рисунок 3.14

## 4 РАСЧЁТ ЦЕПЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Мгновенные значения периодических несинусоидальных величин обычно представляют аналитически в виде ряда Фурье, содержащего постоянную составляющую, первую (основную) гармонику и высшие гармоники. Например, мгновенное значение несинусоидального напряжения  $u(\omega t)$  в общем случае будет иметь вид

$$u(\omega t) = U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + \\ + U_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + U_{mn} \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

где  $U_0$  — постоянная составляющая напряжения;

$U_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$  — первая (основная) гармоника;

$U_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2), \dots, U_{kn} \sin(k\omega t + \varphi_k)$  — высшие гармоники;

$n$  — номер последней из учитываемых высших гармоник.

Действующее значение напряжения в этом случае вычисляется по формуле

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + \dots} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^n \frac{U_{mk}^2}{2}},$$

где  $k$  — номер гармоники.

Расчёт неизвестных значений токов и напряжений производится на основе принципа суперпозиции, для чего последовательно составляются и рассчитываются частичные схемы замещения при действии каждой из составляющих ряда Фурье. При этом сопротивления реактивных элементов зависят от частоты  $k$ -й гармоники  $k\omega$  и вычисляются по формулам

$$X_{Li} = k\omega L = 2\pi k f_1 L;$$

$$X_{Ci} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{1}{2\pi k f_1 C}.$$

где  $f_1$  — частота основной гармоники, Гц.

При расчёте частичной схемы замещения цепи по постоянной составляющей необходимо учитывать, что сопротивление ёмкостного элемента при  $\omega$ , равном 0 стремится к бесконечности, и по-

этому в токе отсутствует постоянная составляющая. Сопротивление индуктивного элемента на постоянном токе, наоборот, равно нулю.

Затем при необходимости определяют мгновенные и действующие значения искомых величин.

Активная  $P$  (Вт), реактивная  $Q$  (вар) и полная  $S$  (В · А) мощности цепи определяются по выражениям

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^n U_k I_k \cos \varphi_k;$$

$$Q = \sum_{k=1}^n U_k I_k \sin \varphi_k;$$

$$S = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^n U_k I_k.$$

Коэффициент мощности цепи вычисляется по формуле

$$\lambda = P / S.$$

Амперметры и вольтметры электромагнитной, тепловой и электродинамической системы показывают действующие значения тока или напряжения соответственно. Приборы магнито-электрической системы без выпрямителя показывают среднее значение за период, равное постоянной составляющей. Приборы выпрямительной системы измеряют среднее по модулю значение величины напряжения:  $U_{\text{ср. мод}} = U / 1,11$ .

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Определить действующее значение напряжения  $U$ , если его мгновенное значение  $u = 8,1 \sin \omega t - 0,9 \sin 3\omega t + 0,32 \sin 5\omega t$ .

**Решение.** Действующее значение напряжения  $U$  (В) определяем по формуле

$$U = \sqrt{\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m5}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8,1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,32}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5,77 \text{ В.}$$

**Пример 2.** Цепь (рис. 4.1), элементы которой имеют параметры  $R = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 31,2 \text{ мГн}$  и  $C = 146 \text{ мкФ}$ , подключена к источнику не-синусоидального напряжения  $u = 25 + 100 \sin(\omega t + 45^\circ) + 50 \sin(3\omega t - 30^\circ)$  с частотой первой гармоники  $f_1 = 50 \text{ Гц}$ . Определить показания приборов, указанных на схеме. Записать аналитическое выражение несинусоидального тока в цепи.

**Решение**

1. Выполним расчёт цепи при действии постоянной составляющей напряжения  $U_0 = 25 \text{ В}$ , при этом частота тока  $f = 0 \text{ Гц}$ .

Сопrotивления элементов цепи составляют

$$R_1 = 40 \text{ Ом};$$

$$X_{L1} = 2\pi fL = 0 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi fC} \rightarrow \infty.$$

Следовательно, постоянная составляющая тока равна нулю.

2. Выполним расчёт цепи при действии первой гармоники напряжения  $u = 100 \sin(\omega t + 45^\circ)$  при частоте тока  $f_1 = 50 \text{ Гц}$ .

Действующее значение напряжения первой гармоники составит

$$U = 100 / \sqrt{2} = 70,7 \text{ В}.$$

Сопrotивления элементов цепи имеют следующие значения:

$$R_1 = 40 \text{ Ом};$$

$$X_{L1} = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 31,2 \cdot 10^{-3} = 9,8 \text{ Ом};$$

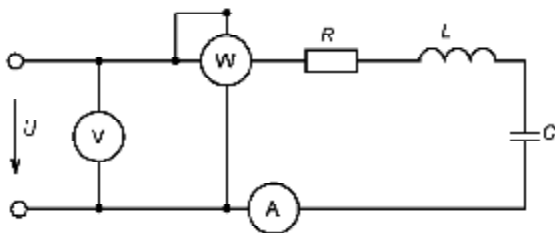


Рисунок 4.1

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 146 \cdot 10^{-6}} = 21,8 \text{ Ом};$$

полное сопротивление цепи —

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{40^2 - (9,8 - 21,8)^2} = 38,2 \text{ Ом};$$

угол сдвига фаз между напряжением и током —

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R_1} = \arctg \frac{9,8 - 21,8}{40} = -16,7^\circ;$$

действующее значение тока в цепи от первой гармоники —

$$I_1 = U_1 / Z_1 = 70,7 / 38,2 = 1,85 \text{ А};$$

амплитудное значение тока в цепи от первой гармоники —

$$I_{m1} = \sqrt{2} I_1 = 2,6 \text{ А}.$$

начальная фаза тока первой гармоники —

$$\varphi_{I1} = \varphi_{U1} + \varphi_1 = 45^\circ - (-16,7^\circ) = 61,7^\circ.$$

3. Выполним расчёт цепи при действии третьей гармоники напряжения  $u = 50 \sin(3\omega t - 30^\circ)$  при частоте тока  $f = 150$  Гц.

Действующее значение напряжения третьей гармоники составит

$$U_3 = 50 / \sqrt{2} = 35,4 \text{ В};$$

сопротивления элементов цепи —

$$R_3 = 40 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 31,2 \cdot 10^{-3} = 29,4 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 146 \cdot 10^{-6}} = 7,3 \text{ Ом};$$

полное сопротивление цепи —

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{40^2 - (29,4 - 7,3)^2} = 33,3 \text{ Ом};$$

угол сдвига фаз между напряжением и током —

$$\varphi_3 = \arctg \frac{X_{L3} - X_{C3}}{R_3} = \arctg \frac{29,4 - 7,3}{40} = 28,9^\circ;$$

действующее значение тока в цепи от третьей гармоники (А) —

$$I_3 = U_3 / Z_3 = 35,4 / 33,3 = 1,1;$$

амплитудное значение тока в цепи от третьей гармоники (А) —

$$I_{m3} = \sqrt{2} I_1 = 1,5;$$

начальная фаза тока третьей гармоники —

$$\varphi_{I3} = \varphi_{U3} - \varphi_3 = -30^\circ - 28,9^\circ = -58,9^\circ.$$

3. Определим действующие значения величин в цепи (показания приборов):

действующее значение напряжения (В) —

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{25^2 + 70,7^2 + 35,4^2} = 82,9;$$

действующее значение тока в цепи (А) —

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{1,85^2 + 1,1^2} = 2,15;$$

активная мощность —

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \\ &= 70,7 \cdot 1,85 \cdot \cos (-16,7^\circ) + 35,4 \cdot 1,1 \cdot \cos (28,9^\circ) = \\ &= 125,3 + 34,1 = 159,4 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

4. Аналитическое выражение несинусоидального тока в цепи определим по выражению

$$I = 1,85 \sin (\omega t + 61,7^\circ) + 1,5 \sin (3\omega t - 58,9^\circ).$$

## Задачи для самостоятельного решения

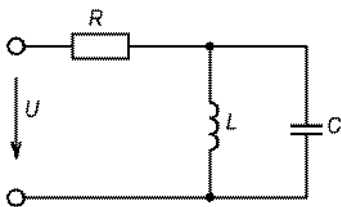
**Задача 4.1.** Напряжение на входе схемы, содержащей последовательно включённые резистивный, индуктивный и ёмкостный элементы, задано выражением. Записать выражение для мгновенного значения тока при частоте первой гармоники 50 Гц, используя исходные данные таблицы 4.1.

**Задача 4.2.** При известных параметрах элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , частоте основной гармоники  $f$  и напряжении источника  $u(\omega t) = 75 + 150 \sin \omega t + 50 \sin (3\omega t + 30^\circ)$  найти мгновенное значение тока и амперметров магнитоэлектрической и электродинамической систем. Рассчитать активную и реактивную мощности цепи (рис. 4.2), используя исходные данные таблицы 4.2.

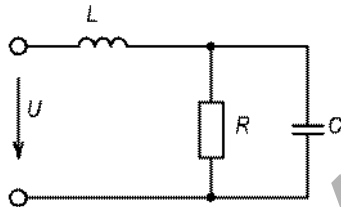
**Задача 4.3.** Определить изменение действующих значений напряжения, тока, активной, реактивной и полной мощности, коэффициента мощности в цепи, содержащей последовательно включённые резистор  $R_1$  и катушку индуктивности с параметрами  $R_L$  и  $L$ , при добавлении к синусоидальному напряжению источника  $u_1$  гармоники напряжения  $u_k$  высшего порядка, используя исходные данные таблицы 4.3.

Т а б л и ц а 4.1

Вариант	$u(\omega t)$ , В	$R_1$ , Ом	$L$ , мГн	$C$ , мкФ
1	$10 + 5 \sin (\omega t + 30^\circ) + 15 \sin (3\omega t - 10^\circ)$	50	200	90
2	$20 + 8 \sin (\omega t + 20^\circ) + 10 \sin (5\omega t - 20^\circ)$	60	300	80
3	$30 + 10 \sin (\omega t + 10^\circ) + 5 \sin (2\omega t - 30^\circ)$	70	400	70
4	$40 + 12 \sin (\omega t + 30^\circ) + 15 \sin (4\omega t - 40^\circ)$	80	300	60
5	$50 + 15 \sin (\omega t + 20^\circ) + 25 \sin (7\omega t + 10^\circ)$	90	200	50
6	$55 + 25 \sin (\omega t + 10^\circ) + 35 \sin (3\omega t + 20^\circ)$	70	400	70
7	$45 + 20 \sin (\omega t + 30^\circ) + 10 \sin (4\omega t + 30^\circ)$	30	600	80
8	$35 + 30 \sin (\omega t + 20^\circ) + 15 \sin (5\omega t + 40^\circ)$	20	500	90
9	$25 + 15 \sin (\omega t + 10^\circ) + 25 \sin (6\omega t - 10^\circ)$	20	600	20
10	$15 + 5 \sin (\omega t + 30^\circ) + 35 \sin (7\omega t - 10^\circ)$	30	500	20



а)



б)

Рисунок 4.2

Т а б л и ц а 4.2

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
$f$ , Гц	25	25	40	40	50	50	60	60	200	200
$R_1$ , Ом	50	60	70	80	90	70	30	20	20	30
$L$ , мГн	200	300	400	300	200	400	600	500	600	500
$C$ , мкФ	90	80	70	60	50	70	80	90	20	20

Т а б л и ц а 4.3

Вариант	$u_1$ , В	$u_k$ , В	$R_1$ , Ом	$R_L$ , Ом	$L$ , мГн
1	$190 \sin(314t)$	$20 \sin(3\omega t - 10^\circ)$	50	30	200
2	$220 \sin(314t)$	$30 \sin(5\omega t - 20^\circ)$	60	20	300
3	$380 \sin(314t)$	$40 \sin(2\omega t - 30^\circ)$	70	10	400
4	$190 \sin(314t)$	$50 \sin(4\omega t - 40^\circ)$	80	30	300
5	$220 \sin(314t)$	$60 \sin(7\omega t + 10^\circ)$	90	20	200
6	$380 \sin(314t)$	$55 \sin(3\omega t + 20^\circ)$	70	10	400
7	$190 \sin(314t)$	$45 \sin(4\omega t + 30^\circ)$	30	40	600
8	$220 \sin(314t)$	$35 \sin(5\omega t + 40^\circ)$	20	30	500
9	$380 \sin(314t)$	$25 \sin(6\omega t - 10^\circ)$	20	20	900
10	$190 \sin(314t)$	$15 \sin(7\omega t - 10^\circ)$	30	10	800

## 5 РАСЧЁТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННОЙ МАГНИТОДВИЖУЩЕЙ СИЛОЙ

При расчёте магнитных цепей с постоянной магнитодвижущей силой (МДС) выделяют два основных типа задач в зависимости от того, какие величины следует в результате определить:

1. Прямая задача — задана требуемая индукция в рабочем зазоре  $B_\delta$ , требуется определить необходимую намагничивающую силу  $Iw$ , т. е. обеспечить подъёмную силу ( $H$ )

$$F = B_\delta^2 s / \mu_0.$$

2. Обратная задача — известна намагничивающая сила катушки  $Iw$ , необходимо определить индукцию  $B_\delta$  в рабочем объёме.

При решении обратной задачи следует решить прямую задачу для 3...5 произвольных значений индукции  $B_\delta$  в воздушном зазоре. Затем строится магнитная характеристика цепи  $B_\delta = f(wI)$ , по которому для заданной намагничивающей силы  $wI$  определяется искомое значение индукции  $B_\delta$ .

Подъёмная сила электромагнита  $F$  ( $H$ ) определяется при известных значениях индукции в рабочем объёме  $B_\delta$  и площади его поперечного сечения  $s_\delta$  по формуле

$$F = \frac{B_\delta^2 s_\delta}{2\mu_0},$$

где  $\mu_0$  — абсолютная магнитная проницаемость ( $1,256 \cdot 10^{-6}$  Гн/м).

Так как в общем случае магнитная проницаемость  $i$ -го участка магнитной цепи определяется по формуле

$$\mu = \mu_0 \mu_r = B / H,$$

то для воздушного зазора (рабочего объёма) принимается  $\mu_r = \mu_0$ , тогда напряжённость магнитного поля вычисляется из выражения

$$H_\delta = B_\delta / \mu_0.$$

Для всех участков магнитопровода магнитная проницаемость  $\mu$  не является величиной постоянной, что обуславливает нелинейность магнитной цепи. В результате значение напряжённости поля  $H$  определяется по основной кривой намагничивания используемого материала, которая обычно задаётся в виде графика  $B = f(H)$ .

В случае неразветвлённой магнитной цепи магнитный поток одинаков для всех участков и определяется по формуле

$$\Phi = B_{\delta} s_{\delta} = B_i s_i.$$

Если магнитопровод имеет разветвления, то следует использовать первый закон Кирхгофа для магнитных цепей, согласно которому алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0,$$

где  $\Phi_i$  — магнитный поток на  $i$ -м участках магнитопровода, которые сходятся в данном узле.

Сечение воздушного зазора  $s_{\delta}$  ( $\text{м}^2$ ) принимают равным сечению прилегающего ферромагнитного участка, определяемого по формуле

$$s_{\delta} = s_i k_{\text{в}},$$

где  $k_{\text{в}}$  — коэффициент выпучивания магнитных линий в воздушном зазоре.

Намагничивающая сила катушки  $Iw$  определяется по закону полного тока:

$$Iw = \sum_{i=1}^n H_i L_i,$$

где  $L_i$  — длина средней линии  $i$ -го участка магнитной цепи (м).

Магнитное сопротивление  $i$ -го участка магнитопровода  $(\text{Ом} \cdot \text{с})^{-1}$  определяется по формуле

$$R_{Mi} = \frac{L_i}{\mu_0 \mu_{ri} s_i}.$$

Индуктивность катушки с магнитопроводом (Гн) вычисляется по выражению  $L = w\Phi/I$ .

### Пример решения задачи

Определить намагничивающую силу, необходимую для создания подъёмной силы электромагнита  $F = 1\,000\text{ Н}$  при силе тока в катушке  $I = 10\text{ А}$ , если расстояние между полюсами и якорем  $\delta = 2\text{ мм}$  (рис. 5.1). Размеры сердечника:  $S_1 = 30 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2$ ,  $S_2 = 20 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2$ ,  $L_1 = L_3 = 0,4\text{ м}$ ,  $L_2 = L_4 = 0,2\text{ м}$ , материал — литая сталь. Коэффициент выпучивания  $k_b$  магнитных линий в воздушном зазоре принять равным 1,05. Вычислить и сравнить магнитное сопротивление участков магнитной цепи.

**Решение.** Из формулы для подъёмной силы электромагнита (Н)

$$F = \frac{B_\delta^2 S_\delta}{2\mu_0} = \frac{B_\delta^2 S_2 k_b}{2\mu_0}$$

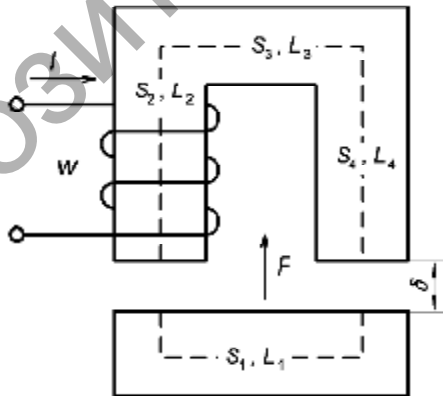


Рисунок 5.1 — Схема магнитной цепи

находим магнитную индукцию

$$B_{\delta} = \sqrt{\frac{2\mu_0 F}{k_b S_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 500}{1,05 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}} = 1,09 \text{ Тл.}$$

Магнитный поток в цепи вычисляем по формуле

$$\Phi = B_{\delta} S_{\delta} = B_{\delta} S_2 k_b = 1,09 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 1,05 = 2,289 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Индукция на участках магнитопровода определяется следующим образом:

$$B_1 = B_3 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{2,289 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1,14 \text{ Тл;}$$

$$B_2 = B_4 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{\Phi}{S_4} = \frac{2,289 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} = 0,76 \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания литой стали (рис. 5.2) находим напряжённость магнитного поля на участках магнитопровода из выражений

$$H_1 = H_3 = 11,5 \cdot 10^2 \text{ А/м;}$$

$$H_2 = H_4 = 6,5 \cdot 10^2 \text{ А/м.}$$

Напряжённость магнитного поля в воздушном зазоре вычисляется по формуле

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1,09}{1,256 \cdot 10^{-6}} = 867 \text{ 834 А/м.}$$

При заданной длине средней линии участков магнитопровода  $L_1 = L_3 = 0,4$  м;  $L_2 = L_4 = 0,2$  м и  $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$  м по закону полного тока определяем намагничивающую силу по выражению

$$\begin{aligned} Iw &= H_1 L_1 + H_2 L_2 + H_3 L_3 + H_4 L_4 + H_{\delta} \delta = \\ &= 2 \cdot 1150 \cdot 0,4 + 2 \cdot 650 \cdot 0,2 + 2 \cdot 867834 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1527 \text{ А} \cdot \text{вит.} \end{aligned}$$

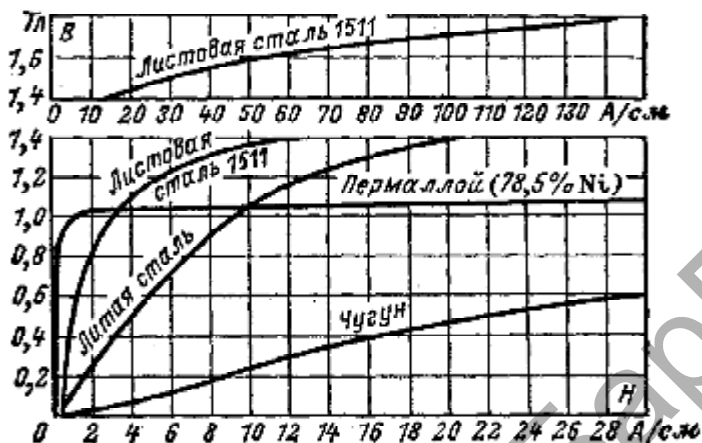


Рисунок 5.2 — Кривые намагничивания стали и чугуна

Следовательно, при токе в катушке  $I$ , составляющем 10 А суммарное количество витков катушки  $w$  должно быть равным 153.

Относительная магнитная проницаемость участков цепи (Гн/м) определяется по формулам

$$\mu_{r1} = \mu_{r3} = \frac{B_1}{\mu_0 H_1} = \frac{B_3}{\mu_0 H_3} = \frac{1,14}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1150} = 789,2;$$

$$\mu_{r2} = \mu_{r4} = \frac{B_2}{\mu_0 H_2} = \frac{B_4}{\mu_0 H_4} = \frac{0,76}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 650} = 930,9;$$

$$\mu_r = 1.$$

Магнитное сопротивление участков магнитной цепи ( $(\text{Ом} \cdot \text{с})^{-1}$ ) вычисляем следующим образом:

$$R_{m1} = R_{m3} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{r1} s_1} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_{r3} s_3} = \frac{0,4}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 789,2 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 134 512;$$

$$R_{m2} = R_{m4} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_{r2} s_2} = \frac{l_4}{\mu_0 \mu_{r4} s_4} = \frac{0,2}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 930,9 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 85 528;$$

$$R_{\text{мб}} = \frac{l_{\delta}}{\mu_0 s_1 k_B} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^{-4} \cdot 1,05} = 505\,510.$$

Следовательно, магнитное сопротивление воздушного зазора значительно больше, чем магнитное сопротивление участков магнитопровода.

Индуктивность катушки с магнитопроводом определяем по формуле

$$L = \frac{w\Phi}{I} = \frac{153 \cdot 2,289 \cdot 10^{-3}}{10} = 35 \text{ мГн.}$$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.1.** На кольцевой замкнутый сердечник прямоугольного сечения с наружным диаметром  $D$ , внутренним диаметром  $d$  и толщиной  $b$  равномерно нанесена обмотка с числом витков  $w$ , равном 200. Определить ток в обмотке катушки, при котором получим магнитный поток в сердечнике  $\Phi$  при заданной марке электротехнической стали сердечника, используя исходные данные таблицы 5.1.

Т а б л и ц а 5.1

Вариант	Сталь магнитопровода (рис. 5.3)	$w$ , вит.	$D$ , м	$d$ , м	$b$ , м	$\Phi$ , Вб
1	1211	150	0,16	0,08	0,02	$10 \cdot 10^{-4}$
2	1513	170	0,16	0,10	0,02	$12 \cdot 10^{-4}$
3	3413	190	0,18	0,10	0,03	$14 \cdot 10^{-4}$
4	1211	210	0,18	0,12	0,03	$16 \cdot 10^{-4}$
5	1513	230	0,20	0,12	0,04	$14 \cdot 10^{-4}$
6	3413	250	0,20	0,14	0,04	$12 \cdot 10^{-4}$

Окончание табл. 5.1

Вариант	Сталь магнитопровода (рис. 5.3)	$w$ , вит.	$D$ , м	$d$ , м	$b$ , м	$\Phi$ , Вб
7	1211	270	0,22	0,14	0,02	$10 \cdot 10^{-4}$
8	1513	290	0,22	0,16	0,02	$11 \cdot 10^{-4}$
9	3413	310	0,24	0,16	0,03	$13 \cdot 10^{-4}$
10	1211	330	0,26	0,18	0,03	$15 \cdot 10^{-4}$

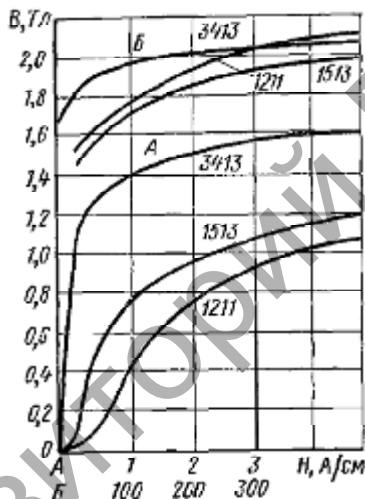


Рисунок 5.3 — Кривые намагничивания электротехнических сталей

**Задача 5.2.** Определить магнитный поток в сердечнике и индуктивность катушки с числом витков  $w$  и током  $I$ . Кольцевой сердечник катушки выполнен из электротехнической стали с внешним диаметром  $D$ , внутренним диаметром  $d$  и толщиной  $b$ . Коэффициент заполнения магнитопровода сталью  $k_{з.с}$  принять равным единице. При решении задачи использовать исходные данные таблицы 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

Вариант	Сталь магнитопровода (см. рис. 5.3)	$w$ , вит.	$D$ , м	$d$ , м	$b$ , м	$I$ , А
1	1211	100	0,016	0,008	0,005	0,05
2	1513	110	0,016	0,010	0,005	0,06
3	3413	120	0,018	0,010	0,001	0,07
4	1211	130	0,018	0,012	0,001	0,08
5	1513	140	0,020	0,012	0,002	0,09
6	3413	150	0,020	0,014	0,002	0,05
7	1211	160	0,022	0,014	0,005	0,06
8	1513	170	0,022	0,016	0,005	0,07
9	3413	180	0,024	0,016	0,001	0,08
10	1211	190	0,026	0,018	0,001	0,09

**Задача 5.3.** В воздушном зазоре магнитопровода катушки (рис. 5.4), набранного из пластин стали 1211 (см. рис. 5.3), требуется получить индукцию  $B_\delta$  составляющую 1 Тл. Определить ток в катушке с числом витков  $w$ , если воздушный зазор равен  $\delta$ . При расчёте потоком рассеяния пренебречь. Коэффициент заполнения магнитопровода сталью  $k_{з,с}$  принять равным 0,95. При решении использовать исходные данные таблицы 5.3.

**Задача 5.4.** Ш-образный магнитопровод (рис. 5.5) выполнен из пластин стали 1513 (см. рис. 5.3). При заданной индукции в воздушном зазоре  $B_\delta$  определить магнитодвижущую силу катушки  $Iw$  и силу  $F$ , с которой будет притягиваться подвижная часть магнитопровода. При расчёте потоком рассеяния пренебречь, коэффициент заполнения стали  $k_{з,с}$  принять равным 1. При решении задачи использовать исходные данные таблицы 5.4.

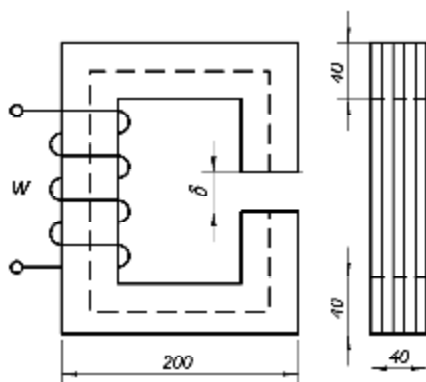


Рисунок 5.4

Т а б л и ц а 5.3

Вариант	$w$ , вит.	$\delta$ , м	$h$ , м	$L$ , м	$b$ , м	$I$ , А
1	200	$4 \cdot 10^{-4}$	0,080	0,100	0,010	0,050
2	250	$6 \cdot 10^{-4}$	0,100	0,120	0,010	0,060
3	300	$8 \cdot 10^{-4}$	0,100	0,120	0,010	0,070
4	350	$1 \cdot 10^{-3}$	0,120	0,140	0,0150	0,080
5	400	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0,120	0,140	0,0150	0,090
6	450	$1,4 \cdot 10^{-3}$	0,140	0,160	0,0150	0,050
7	500	$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,140	0,160	0,020	0,060
8	550	$1,8 \cdot 10^{-3}$	0,160	0,180	0,020	0,070
9	600	$2,0 \cdot 10^{-3}$	0,160	0,180	0,020	0,080
10	650	$2,4 \cdot 10^{-3}$	0,180	0,200	0,020	0,090

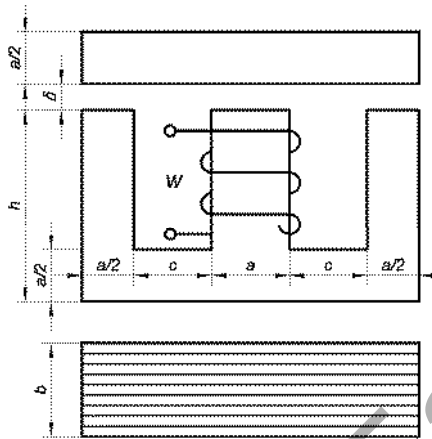


Рисунок 5.5

Т а б л и ц а 5.4

Вариант	$B_{\delta}$ , Тл	$\delta$ , мм	$a$ , мм	$b$ , мм	$h$ , м
1	0,80	0,2	14	12	30
2	0,85	0,4	14	14	40
3	0,90	0,6	14	16	50
4	0,95	0,8	14	18	30
5	1,00	1,0	14	20	40
6	1,05	1,2	16	12	50
7	1,10	1,4	16	14	30
8	1,15	1,6	16	16	40
9	1,20	1,8	16	18	50
10	1,25	2,0	16	20	60

**Задача 5.5.** Определить магнитный поток в воздушном зазоре катушки с незамкнутым магнитопроводом, а также относительную магнитную проницаемость магнитопровода катушки, если заданы

длина средней линии  $l_{cp}$  и сечение  $S$  магнитопровода, длина воздушного зазора  $\delta$ , ток в обмотке  $I$ , число витков  $w$ . Поле рассеяния пренебречь, поле воздушного зазора считать равномерным. При решении задачи использовать исходные данные таблицы 5.5.

Т а б л и ц а 5.5

Вариант	Материал магнитопровода (см. рис. 5.3)	$l_{cp}$ , м	$s$ , мм <sup>2</sup>	$\delta$ , м	$w$	$I$ , А
1	1211	0,50	500	$2 \cdot 10^{-3}$	500	3
2	1513	0,30	400	$1,5 \cdot 10^{-3}$	500	2
3	3413	0,40	100	$1 \cdot 10^{-3}$	500	1
4	1211	0,50	300	$1,5 \cdot 10^{-3}$	500	2
5	1513	0,60	200	$2 \cdot 10^{-3}$	300	3
6	3413	0,50	500	$2,5 \cdot 10^{-3}$	300	2
7	1211	0,40	400	$2 \cdot 10^{-3}$	300	1
8	1513	0,30	100	$1,5 \cdot 10^{-3}$	200	2
9	3413	0,20	300	$1 \cdot 10^{-3}$	200	3
10	1211	0,40	200	$2 \cdot 10^{-3}$	200	2

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Лоторейчук, Е. А.* Теоретические основы электротехники : учеб. / Е. А. Лоторейчук. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2004. — 316 с.
2. *Иванов, И. И.* Электротехника. Основные положения, примеры и задачи / И. И. Иванов, А. Ф. Лукин, Г. И. Соловьёв. — СПб. : Линь 2004. — 192 с.
3. *Рекус, Г. Г.* Сборник задач и упражнений по электротехнике / Г. Г. Рекус. — М. : Высш. шк., 2001. — 416 с.
4. Задачник по электротехнике : учеб. пособие для сред. проф. образования / П. Н. Новиков [и др.]. — М. : Академия, 2003. — 336 с.
5. *Полещук, В. И.* Задачник по электротехнике и электронике : учеб. пособие для сред. проф. образования / В. И. Полещук. — М. : Академия, 2004. — 224 с.
6. *Пономаренко, В. К.* Пособие к практическим занятиям по теории электрических цепей : учеб. пособие / В. К. Пономаренко. — Озерск : ОТИ МИФИ, 2001. — 200 с.

*Производственно-практическое издание*

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО РАСЧЁТУ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ  
ЦЕПЕЙ**

**Практическое пособие  
для аудиторной и самостоятельной работы  
студентов инженерных специальностей**

Составитель *И. В. Дубень*

Ведущий редактор *Е. Г. Хохол*

Технический редактор *В. В. Кукреш*

Корректор *С. А. Березнюк*

Компьютерная вёрстка *В. В. Кукреш*

Подписано в печать 19.09.2013.

Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Таймс. Отпечатано на ризографе.

Усл. печ. л. 7,91. Уч.-изд. л. 4,01.

Заказ 9. Тираж 140 экз.

ЛИ 02330/0552803 от 09.02.2010

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования

«Барановичский государственный университет»,  
225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21.

# Инженерный

## факультет

### БарГУ

#### Специальности:

- ✓ **Технология машиностроения;**
- ✓ **Технологическое оборудование машиностроительного производства;**
- ✓ **Информационные системы и технологии;**
- ✓ **Автоматизация технологических процессов и производств;**
- ✓ **Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного производства;**
- ✓ **Экономика и организация производства (машиностроение);**
- ✓ **Агроинженер;**
- ✓ **Зооинженер.**

Ведущие промышленные предприятия г. Барановичи являются базовыми: станкостроительный завод «Атлант», завод автоматических линий, автоагрегатный завод, завод торгового машиностроения, завод станкопринадлежностей и др. На них студенты проходят производственные и преддипломные практики. Лаборатории, конструкторские бюро и производственные участки предприятий, оснащенные современными техническими средствами, используются для проведения лабораторных работ и научных исследований.

Выпускники распределяются на предприятия республики с учетом уровня теоретической и практической подготовленности.

Учреждение образования  
"БАРАНОВИЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ"

ФАКУЛЬТЕТ ДОВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ

приглашает для подготовки  
к централизованному тестированию  
и вступительным испытаниям в вузы

ДНЕВНОЕ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

- W Приглашаются лица с законченным средним или средним специальным образованием для комплексной целенаправленной подготовки к централизованному тестированию и поступлению в вузы Республики Беларусь.
- W Слушатели изучают три предмета централизованного тестирования и вступительных испытаний по выбранной специальности.

Срок обучения – *7,5 месяцев (24 часа занятий в неделю)*

Учреждение образования  
"БАРАНОВИЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ"

СПОРТИВНЫЙ  
КЛУБ

В университете функционируют секции и группы здоровья по различным видам спорта. Ежегодно проводятся круглогодичные спартакиады среди профессорско-преподавательского состава и сотрудников университета. Сборные команды достойно представляют университет на Республиканской универсиаде, на чемпионатах и кубках Республики Беларусь.