

**Заключение.** В работе дан план доказательства нашего основного результата: теоремы 4. Её полное доказательство не приводится по причине редакционных ограничений на объём публикации.

Новизна статьи заключается в привлечении в рассматриваемую теорию вышеупомянутых результатов А. Зигмунда [9, с. 697, теорема 1, (1.4), теорема 2, (1.8); 10, с. 591, п. 8.7.27(15), п. 8.7.27(18)].

#### Список цитируемых источников

1. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 264 с.
2. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
3. Турецкий, А. Х. О классах насыщения в пространстве  $C/A$ . Х. Турецкий // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1961. – Т. 25, № 3. – С. 411–442.
4. Alexits, G. On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series / G. Alexits // Approximation theory : (Selected papers) / G. Alexits. – Budapest : Académiai kiadó, 1983. – P. 41–50.
5. Zamansky, M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques / M. Zamansky // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. – 1950. – Т. 67, № 2. – P. 161–198.
6. Butzer, P. L. Fourier Analysis and Approximation / P. L. Butzer, R. J. Nessel. – Basel; Stuttgart : Birkhäuser, 1971. – XVI+533 p.
7. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды : в 2 т. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т. I. – 615 с.
8. Бруй, И. Н. К суммируемости со скоростью средними С. Н. Бернштейна тригонометрических рядов Фурье / И. Н. Бруй // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 6–12.
9. Zygmund, A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series / A. Zygmund // Duke Math. J. – 1945. – Vol. 12. – P. 695–704.
10. Тиман, А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 624 с.

УДК 517.542

**И. Н. Бруй, А. Д. Рыбак**

Учреждение образования «Барановичский государственный университет»,  
Барановичи, Республика Беларусь

### НЕВЫПУКЛЫЕ ЛИНИИ УРОВНЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ К ФУНКЦИИ Н. Е. ЖУКОВСКОГО

**Введение.** Функция Н. Е. Жуковского

$$\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

конформно и однолистно отображает как внутренность, так и внешность единичной окружности  $|z|=1$  в комплексной  $z$ -плоскости на внешность отрезка  $[-1, 1]$  в комплексной  $w$ -плоскости. В. К. Дзядык [1, с. 350] с внешностью единичной окружности связывает большую заглавную букву  $\Psi$ . Обратной к функции Н. Е. Жуковского (1) является функция  $z = \Psi(C \setminus [-1, 1], w) \equiv w + \sqrt{w^2 - 1}$ , где выбрана та ветвь двузначной функции корня квадратного, для которой  $\sqrt{1}=1$ . Она проходима против хода часовой стрелки (counterclockwise) единичную окружность

$$w = e^{it}, \quad -\pi \leq t \leq \pi, \quad (2)$$

в комплексной  $w$ -плоскости переводит в проходима также против хода часовой стрелки кривую

$$\Gamma_{\text{Apple}} \equiv \left\{ z = e^{it} + \sqrt{e^{i2t} - 1} : -\pi \leq t \leq \pi \right\}, \quad (3)$$

которая напоминает контур осевого сечения яблока и которая имеет в  $z$ -плоскости в качестве осей симметрии как вещественную ось  $\text{Re } z$ , так и мнимую ось  $i \text{Im } z$ , и, следовательно, начало системы координат  $z_0 \equiv 0$  в качестве центра симметрии.

Параметру  $t_1=0$  соответствует точка  $z_1 = e^{i \cdot 0} + \sqrt{e^{i2 \cdot 0} - 1} = 1$  на вещественной оси  $\text{Re } z$ , а параметру

$t_2 = \pi/2$  соответствует точка  $z_2 = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} + \sqrt{e^{i2 \cdot \frac{\pi}{2}} - 1} = i(1 + \sqrt{2})$  на мнимой оси  $i \text{Im } z$ . Для значения параметра

$t_3 = \pi/4$  имеем точку  $z_3 = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} + \sqrt{e^{i2 \cdot \frac{\pi}{4}} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1+i}$ . Так как по выбору ветви  $\sqrt{1}=1$ , то

$\sqrt{-1+i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$ . В итоге: значению параметра  $t_3 = \pi/4$  соответствует

точка  $z_3 = \left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{12-8\sqrt{2}}\right)/2 + i\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{12+8\sqrt{2}}\right)/2 \approx 1,2 + 1,8i$  на комплексной  $(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)$ -плоскости.

Таким образом, яблоко-образная кривая  $\Gamma_{\text{Apple}}$  проходит через четыре точки  $\pm 1, \pm(1+\sqrt{2})i$ , а также через точку  $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{12-8\sqrt{2}}\right)/2 + i\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{12+8\sqrt{2}}\right)/2 \approx 1,2 + 1,8i$  и последней 1) одну симметричную относительно  $z_0 \equiv 0$  точку и 2) две симметричные относительно вещественной  $\operatorname{Re} z$  и мнимой  $i \operatorname{Im} z$  осей точки. В точках  $\pm 1$  невыпуклая яблоко-образная область  $\operatorname{Int} \Gamma_{\text{Apple}}$  имеет внешние углы в радианах раствора  $\pi/2$ .

Строим  $\Gamma_{\text{Apple}}$ :

$$\cos t + \sqrt{|\sin t|} \left( \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) + i \left[ \sin t + \sqrt{|\sin t|} \left( \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \right) \right],$$

где —  $\pi \leq t \leq \pi$  (рисунок 1).

Обоими авторами написана теоретическая часть. Вторым соавторам сделаны все чертежи.

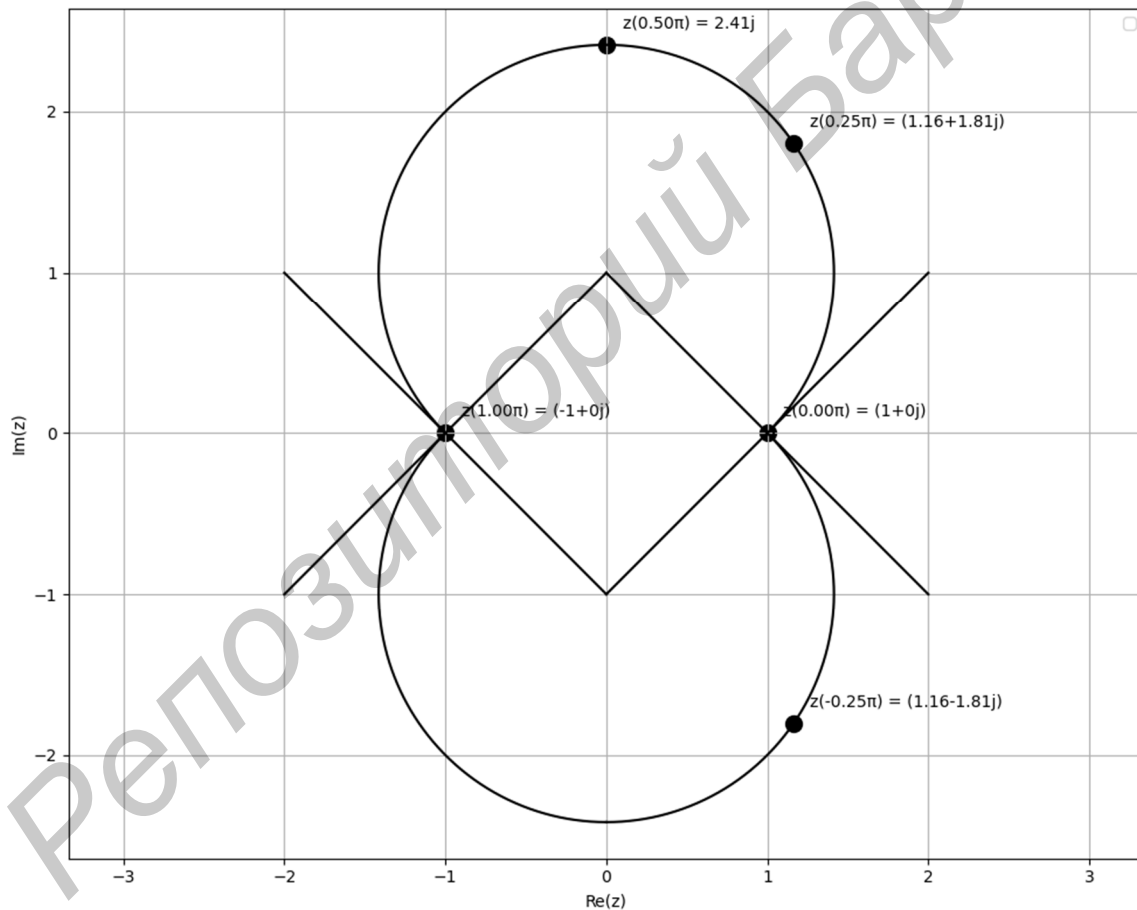


Рисунок 1 — Яблоко-образная кривая в  $z$ -плоскости

**Основная часть.** Исходные окружности (прообразы линий уровня) представлены на рисунке 2.

Берём окружность положительного радиуса  $r$  строго меньше 1 вместо единичной окружности (2), т. е. берём  $w = r e^{it}$ , где  $0 < r < 1$  и  $-\pi \leq t \leq \pi$ . Образом последней окружности вместо (3) будет линия уровня

$$\begin{aligned} z(r e^{it}) &\equiv r e^{it} + \sqrt{(r e^{it})^2 - 1} = \\ &= r (\cos t + i \sin t) + \sqrt{r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t} . \end{aligned} \quad (4)$$

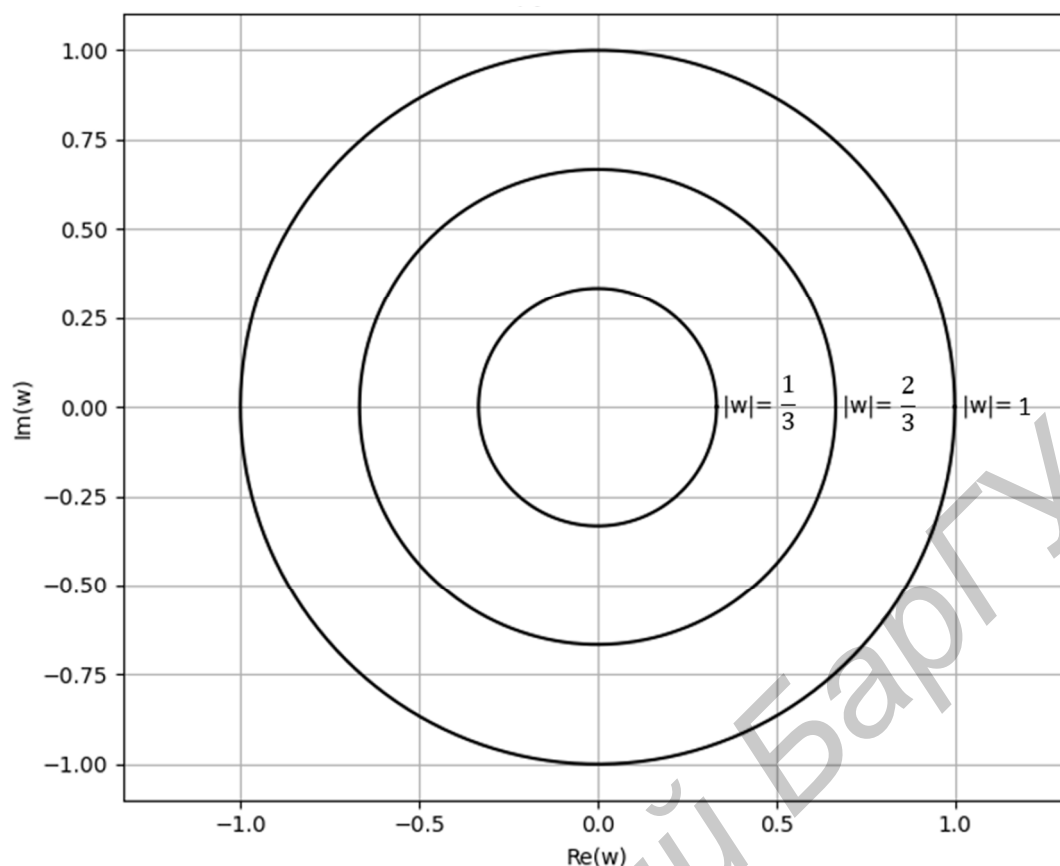


Рисунок 2 — Исходные окружности (прообразы линий уровня) в  $w$ -плоскости

Если подкоренное выражение в (4) записать в тригонометрической форме  $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , то его модуль

$$\rho \equiv \left| r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t \right| = \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1}, \quad (5)$$

а значение аргумента подкоренного выражения в (4) находится из системы

$$\begin{cases} \cos \left[ \arg \left( r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t \right) \right] = \frac{r^2 \cos 2t - 1}{\rho}, \\ \sin \left[ \arg \left( r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t \right) \right] = \frac{r^2 \sin 2t}{\rho}. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда главная ветвь корня квадратного

$$\begin{aligned} & \sqrt{r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t} = \\ & = \sqrt{\rho} \left\{ \cos \left[ \frac{1}{2} \arg \left( r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t \right) \right] + i \sin \left[ \frac{1}{2} \arg \left( r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, так как, во-первых, согласно школьным формулам

$$\cos \frac{\Psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \Psi}{2}}, \quad \forall \Psi \in (-\pi, \pi] \quad \sin \frac{\Psi}{2} = \operatorname{sgn} \Psi \sqrt{\frac{1 - \cos \Psi}{2}}, \quad (8)$$

во-вторых, верхнее соотношение системы (6) влечёт

$$\arg \left( r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t \right) = \arccos \frac{r^2 \cos 2t - 1}{\rho} \in [0, \pi], \quad (9)$$

то на основании (8) и (9) имеем:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \frac{1}{2} \arg (r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t) \right] &= \sqrt{\frac{1 + \cos \left[ \arg (r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t) \right]}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos \left( \arccos \frac{r^2 \cos 2t - 1}{\rho} \right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{r^2 \cos 2t - 1}{\rho}}{2}} = \sqrt{\frac{\rho + r^2 \cos 2t - 1}{2\rho}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sin \left[ \frac{1}{2} \arg (r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t) \right] &= \\ = \operatorname{sgn} \left[ \arg (r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t) \right] \sqrt{\frac{1 - \cos \left[ \arg (r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t) \right]}{2}} &= \\ = \sqrt{\frac{\rho - r^2 \cos 2t + 1}{2\rho}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому для главной ветви корня квадратного (7) с учётом (10) и (11) получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 \cos 2t - 1 + i r^2 \sin 2t} &= \\ = \sqrt{\rho} \left( \sqrt{\frac{\rho + r^2 \cos 2t - 1}{2\rho}} + i \sqrt{\frac{\rho - r^2 \cos 2t + 1}{2\rho}} \right) &= \\ = \sqrt{\frac{\rho + r^2 \cos 2t - 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\rho - r^2 \cos 2t + 1}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Линия уровня (4) в силу (5) и (12)

$$\begin{aligned} z(r e^{it}) &= r (\cos t + i \sin t) + \sqrt{\frac{\rho + r^2 \cos 2t - 1}{2}} + i \sqrt{\frac{\rho - r^2 \cos 2t + 1}{2}} = \\ &= r \cos t + \sqrt{\frac{r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 + r^2 \cos 2t - 1}{2}} + \\ &+ i \left( r \sin t + \sqrt{\frac{r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 - r^2 \cos 2t + 1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Когда  $t=0$ , то на линии уровня (13) точка

$$\begin{aligned} z(r e^{i \cdot 0}) &= r \cos 0 + \sqrt{\frac{r^4 - 2r^2 \cos 2 \cdot 0 + 1 + r^2 \cos 2 \cdot 0 - 1}{2}} + \\ &+ i \left( r \sin 0 + \sqrt{\frac{r^4 - 2r^2 \cos 2 \cdot 0 + 1 - r^2 \cos 2 \cdot 0 + 1}{2}} \right) = \\ &= r + \sqrt{\frac{r^4 - 2r^2 + 1 + r^2 - 1}{2}} + i \sqrt{\frac{r^4 - 2r^2 + 1 - r^2 + 1}{2}} = \\ &= r + \sqrt{\frac{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + r^2 - 1}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{(r^2 - 1)^2 - r^2 + 1}}{2}} = \\ &= r + \sqrt{\frac{|r^2 - 1| + r^2 - 1}{2}} + i \sqrt{\frac{|r^2 - 1| - r^2 + 1}{2}} = r + i \sqrt{1 - r^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае  $t = \frac{1}{2} \arccos r^2$  на линии уровня (13) точка

$$z \left( r e^{i \cdot \frac{1}{2} \arccos r^2} \right) = r \cos \left( \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) + 1 + r^2 \cos \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) - 1}}{2}} +$$

$$+ i \left[ r \sin \left( \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) + \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) + 1 - r^2 \cos \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) + 1}}{2}} \right].$$

По школьным формулам (8)

$$\cos \left( \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\arccos r^2)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + r^2}{2}},$$

$$\sin \left( \frac{1}{2} \arccos r^2 \right) = \operatorname{sgn}(\arccos r^2) \sqrt{\frac{1 - \cos(\arccos r^2)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - r^2}{2}}.$$

Тогда точка на линии уровня (13)

$$z \left( r e^{i \cdot \frac{1}{2} \arccos r^2} \right) = r \sqrt{\frac{1 + r^2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cdot r^2 + 1 + r^2 \cdot r^2 - 1}}{2}} +$$

$$+ i \left( r \sqrt{\frac{1 - r^2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cdot r^2 + 1 - r^2 \cdot r^2 + 1}}{2}} \right) =$$

$$= r \sqrt{\frac{1 + r^2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{1 - r^4} + r^4 - 1}{2}} + i \left( r \sqrt{\frac{1 - r^2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{1 - r^4} - r^4 + 1}{2}} \right). \quad (15)$$

Ясно, что при  $0 < r < 1$  неравенство  $\sqrt{1 - r^4} + r^4 - 1 \geq 0$  влечёт неравенство  $r^4 (r^4 - 1) \leq 0$ .

Для  $0 < t < \frac{1}{2} \arccos r^2$  строим открытую дугу

$$r \cos t + \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 + r^2 \cos 2t - 1}}{2}} +$$

$$+ i \left( r \sin t + \sqrt{\frac{\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos 2t + 1 - r^2 \cos 2t + 1}}{2}} \right)$$

и дополняем её точками (14) и (15). Полученное множество отображаем 1) относительно вещественной  $\operatorname{Re} z$  и мнимой  $i \operatorname{Im} z$  осей и 2) центрально-симметрично относительно начало системы координат  $z_0 \equiv 0$ . Образы окружностей рис. 2, т. е. линии уровня, приведены на рисунке 3.

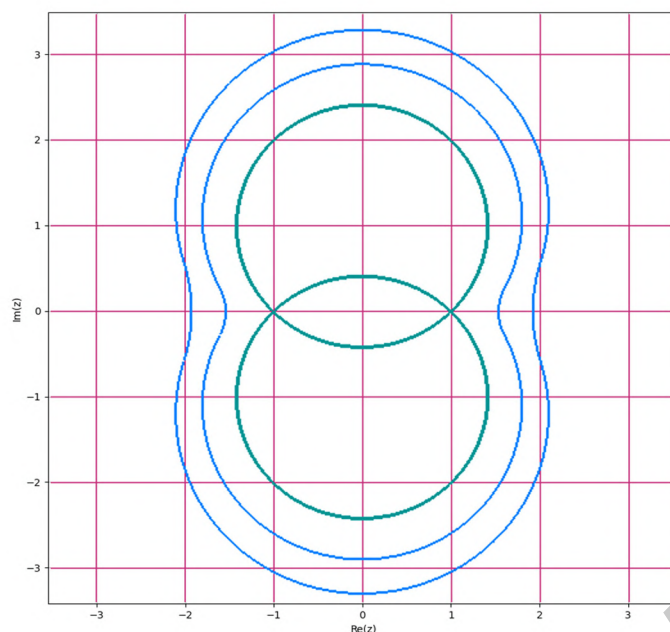


Рисунок 3 — Образы окружностей (линии уровня) в  $z$ -плоскости

**Заключение.** Авторы намерены линии уровня использовать для расчёта обводов опор мостов, призванных противостоять, например, селям, т. е. движущимся грязе-каменным потокам.

Считаем полезным обратить внимание на мосты Древнего Рима. Перекрытия над их опорами состоят из блоков, которые не скреплены между собой раствором. Тысячи лет опоры мостов подвергались ударам крупных валунов грязе-каменных потоков и сейсмическим воздействиям. Наиболее известен Гардский мост в Южной Франции, сооружённый во втором веке нашей эры. На рисунке 4 направление движения селя сверху вниз.

В будущем мы хотим с учётом вязкости среды, т. е. с помощью чисел Рейнольдса, рассчитать прохождение селей между опорами моста.

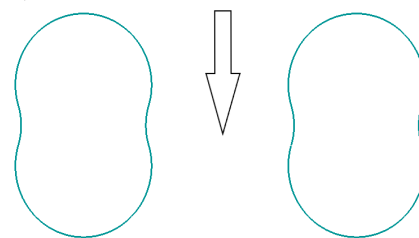


Рисунок 4 — Две опоры моста в  $z$ -плоскости

#### Список цитируемых источников

1. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.

УДК007

**О. Л. Бушейко**

*Учреждение образования «Барановичский государственный университет»,  
Барановичи, Республика Беларусь*

### ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ КАК РЕПЕТИТОР

**Введение.** В современном мире, где технологии развиваются с невероятной скоростью, искусственный интеллект (ИИ) все глубже проникает в различные сферы нашей жизни. Одной из самых перспективных областей применения ИИ является образование, а именно – роль репетитора. ИИ-репетиторы обещают персонализированный подход к обучению, доступность и эффективность, что делает их привлекательной альтернативой традиционным методам.

**Основная часть.** Искусственный интеллект (ИИ) — это область компьютерных наук, занимающаяся созданием систем, способных выполнять задачи, которые требуют человеческого интеллекта [1]. ИИ-репетитор — это программное обеспечение, использующее алгоритмы машинного обучения и обработки естественного языка для предоставления индивидуализированной помощи в обучении. В отличие от обычных онлайн-курсов или видеуроков, ИИ-репетитор способен адаптироваться к уровню знаний обучающегося, а именно анализирует ответы обучающегося, выявляет пробелы в знаниях и подстраивает программу обучения под его индивидуальные потребности; предоставляет мгновенную обратную связь, т. е. обучающийся получает немедленную оценку своих ответов и объяснения ошибок, что позволяет быстро усваивать материал; предлагает