

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ БЛОЧНОЙ МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ НА СТЕКАХ

Наранович О.И.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, проф. Синицын А.К.
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
кафедра «Вычислительных методов и программирования»,
ул. Коммунистическая, д. 27, кв. 27, Барановичи, —225320, Брестская обл., Беларусь
Тел.: (80163)499079; e-mail: narok@tut.by

Аннотация – Предложен эффективный прямой метод решения конечно-разностной схемы аппроксимирующей краевую задачу для двумерного дифференциального уравнения эллиптического типа.

I. Введение

Многие стационарные задачи математической физики приводят к решению краевой задачи для двумерного эллиптического дифференциального уравнения [1]. Решение этой задачи с использованием метода сеток сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) со слабо заполненной матрицей очень большого порядка. Для решения краевой задачи использовалась экономичная модификация метода Гаусса с выбором главного элемента – метод блочной матричной прогонки.

В докладе предлагается универсальный, устойчивый алгоритм на основе использования метода блочной матричной прогонки [2], в котором реализуется прямой метод Гаусса с выбором главного элемента на упакованной матрице в виде стеков.

II. Основная часть

Краевую задачу для эллиптического дифференциального уравнения вида

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(b \frac{\partial u}{\partial r} \right) + c \frac{\partial u}{\partial z} + d \frac{\partial u}{\partial r} + eu = f \quad (1)$$

где коэффициенты a, b, c, d, e, f являются функциями от z и r с граничными условиями для прямоугольной области $\Omega = \{0 \leq z \leq L, b_1 \leq r \leq b_2\}$

$$\left(\alpha^{0,L} \frac{\partial u}{\partial z} + \beta^{0,L} u \right)_{0,L} = \gamma^{0,L}; \quad \left(\alpha^{1,2} \frac{\partial u}{\partial r} + \beta^{1,2} u \right)_{b_1, b_2} = \gamma^{1,2} \quad (2)$$

приводим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). После некоторых преобразований система ОДУ может быть записана в векторном виде:

$$E(z) \frac{d^2 \vec{u}}{dz^2} + Q(z) \frac{d\vec{u}}{dz} + G(z) \vec{u} = \vec{f}(z) \quad (3)$$

Краевые условия при $z=0, L$ для (3) получаются из первого уравнения граничных условий (2).

Для решения краевой задачи выберем в соответствии [2] на интервале $\{0 \leq z \leq L\}$ равномерную сетку $\sigma_{nz} = \{z_i = (i-1)h_z, h_z = L/n, i = 1 \dots n+1\}$. Для расчетов используем конечно-разностную центральную схему второго порядка точности:

$$E_i \frac{\vec{u}_{i-1} - 2\vec{u}_i + \vec{u}_{i+1}}{h_z^2} + Q_i \frac{\vec{u}_{i+1} - \vec{u}_{i-1}}{2h_z} + G_i \vec{u}_i = \vec{f}_i; \quad i = 2 \dots n \quad (4)$$

После приведения подобных членов в (4), получим СЛАУ:

$$\left(E_i - \frac{h_z}{2} Q_i \right) \vec{u}_{i-1} + \left(-2E_i + h_z^2 G_i \right) \vec{u}_i + \left(E_i + \frac{h_z}{2} Q_i \right) \vec{u}_{i+1} = h_z^2 \vec{f}_i \quad (5)$$

Используем аппроксимацию второго порядка точности для первого уравнения граничных условий (2):

$$\alpha^0 (-3u_{1,j} + 4u_{2,j} - u_{3,j}) + 2h_z \beta^0 u_{1,j} = 2h_z \gamma^0; \quad \alpha^L (3u_{n+1,j} - 4u_{n,j} + u_{n-1,j}) + 2h_z \beta^L u_{n+1,j} = 2h_z \gamma^L \quad (6)$$

Представим СЛАУ для конечно-разностной схемы (5), (6) в виде $A \vec{x} = \vec{d}$.

Матрица A размерности $k \times k$, $k = (n+1)(m+1)$ имеет, блочно-ленточную структуру со слабо заполненными матрицами блоков из [2]. Вектор правых частей \vec{d} имеет вид (для граничных условий с $\alpha^{1,2} \neq 0$):

$$\vec{d} = \{\gamma^0 \cdot \gamma^0, f_{1,0} + p\gamma^1, f_{1,1} \dots f_{1,m-1}, f_{1,m} + p\gamma^2, \dots, f_{n+1,0} + p\gamma^1, f_{n+1,1} \dots f_{n+1,m-1}, f_{n+1,m} + p\gamma^2, \gamma^L \cdot \gamma^L\}$$

Рассматриваемая в докладе методика решения СЛАУ с блочно ленточной матрицей (5), (6) является экономичной модификацией метода Гаусса с выбором главного элемента – метод блочной матричной прогонки. Идея алгоритма заключается в реализации метода Гаусса на упакованном массиве, в который помещаются не нулевые блочные элементы матриц. Так, как в рассматриваемом случае матрицы G и Q слабо заполнены, то наряду с упаковкой в ленточные массивы, был разработан алгоритм упаковки только ненулевых элементов в массив из односвязных динамических стеков.

В качестве тестовых испытаний разработанных алгоритмов решены две задачи: краевая задача для волнового уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат и краевая задача для уравнения теплопроводности, описывающая температурный режим в слое жидкости, движущейся между двумя плоскостями.

III. Заключение

Таким образом, разработаны два программных модуля в системе Delphi, содержащих набор методов класса, реализующих алгоритм Гаусса на упакованной матрице в виде массива из стеков и в виде ленточного массива. Многочисленные расчеты на последовательности сеток показали абсолютную устойчивость и сходимость к точному решению в соответствии с аппроксимацией второго порядка предлагаемого алгоритма. Алгоритм с упаковкой в массив из стеков для рассматриваемой задачи работает в 15-30 раз быстрее.

IV. Список литературы

- [1] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. – Мн.: Наука и техника. 1986г. – 288 с.
- [2] Синицын А.К. Современные информационные технологии. Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики. Конспект лекций для аспирантов и магистрантов БГУИР. – Мн.: БГУИР, 2004г. – 55 с.