С. І. Русан

СТАТЫКА.
ЯКАСНЫ АНАЛІЗ РАЎНАВАГІ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ

Практычны дапаможнік
для студэнтаў інжынерных спецыяльнасцей
установ вышэйшай адукацыі

Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь
Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт»

С. І. Русан

СТАТЫКА.
ЯКАСНЫ АНАЛІЗ РАЎНАВАГІ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ

Практычны дапаможнік
для студэнтаў інжынерных спецыяльнасцей
устаноў вышэйшай адукацыі

Баранавічы
БарДУ
2017

УДК 621.81(072)
ББК 34.44я73
Р11

Рэцэнзенты:

дацэнт кафедры агульнанавуковых дысцыплін, кандыдат тэхнічных навук установы адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт» А. К. Гаўрыленя,
дацэнт кафедры тэхналогіі машынабудавання, кандыдат тэхнічных навук установы адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт» М. В. Чычкан

Русан, С. І.

Р11 Статыка. Якасны аналіз раўнавагі механічных сістэм : практ. дапаможнік для студэнтаў інжынерных спецыяльнасцей устаноў выш. адукацыі / С. І. Русан. — Баранавічы : БарДУ, 2017. — 52 с.
ISBN 978-985-498-770-5.

Практычны дапаможнік прысвечаны якаснаму сілавому аналізу плоскіх і прасторавых статычна вызначальных механічных сістэм. Мэта яго распрацоўкі — дапамагчы дапытлівым студэнтам зразумець і замацаваць механічную сутнасць фундаментальных паняццяў курса тэарэтычнай механікі, пазнаёміцца з асновамі структурнага аналізу і ўяўным эксперыментам. Назапашаны ў выніку досвед дазволіць ім у далейшым лягчэй сумяшчаць у свядомасці абстрактныя мадэлі з рэальнымі аб’ектамі тэхнікі. Змест дапаможніка адпавядае адукацыйным стандартам спецыяльнасцей і вучэбнай праграме дысцыпліны «Тэарэтычная механіка».

Рэкамендуецца студэнтам спецыяльнасцей 1-36 01 01 «Тэхналогія машынабудавання», 1-36 01 03 «Тэхналагічнае абсталяванне машынабудаўнічай вытворчасці», 1-53 01 01 «Аўтаматызацыя тэхналагічных працэсаў і вытворчасцей», 1-74 06 01 «Тэхнічнае забяспячэнне працэсаў сельскагаспадарчай вытворчасці».

УДК 621.81(072)
ББК 34.44я73

ISBN 978-985-498-770-5

ЗМЕСТ

ПРАДМОВА

Абстрактная форма выкладання лекцыйнага курса тэарэтычнай механікі пастаянна выклікае цяжкасці пры вывучэнні дысцыпліны ў тэхнічных установах вышэйшай адукацыі. Адсутнасць у большасці студэнтаў дастаткова развітага абстрактнага мыслення не дазваляе ім злучыць у свядомасці тэарэтычныя звесткі з рэальнымі аб'ектамі тэхнікі. У выніку завучаныя тэарэтычныя палажэнні курса і фармалізаваныя методыкі рашэння задач не спрыяюць фарміраванню доўгатэрміновых ведаў. У такой сітуацыі мэтазгодна ў арганізацыі вучэбнага працэсу прадугледзець элементы індуктыўнага метаду. Досвед паказвае, што асаблівай дасканаласці методыкі выкладання дысцыпліна патрабуе на самым пачатку — пры вывучэнні статыкі. Без цвёрдага засваення асноўных яе паняццяў і тэрміналогіі далейшае вывучэнне курса не можа быць паспяховым. Узнікае неабходнасць пачынаць вывучэнне статыкі з больш нізкага ўзроўню складанасці практычных заданняў, і такім чынам забяспечыць магчымасць іх самастойнага выканання студэнтамі. На жаль, у метадычнай літаратуры па дысцыпліне такія заданні адсутнічаюць. І таму «парог» на ўваходзе ў дысцыпліну для многіх студэнтаў занадта высокі. Прапануемая метадычная распрацоўка часткова кампенсуе адзначаны недахоп метадычнай літаратуры. Яе ўкараненне ў вучэбны працэс паспрыяе рэалізацыі педагагічнага *прынцыпа даступнасці* пры вывучэнні дысцыпліны.

Якасны аналіз механічных сістэм, у адрозненне ад тыпавога (колькаснага) аналізу, не патрабуе дакладнага вызначэння невядомых велічынь. Знаходзіцца толькі іх набліжаны ўзровень. Напрыклад, устанаўліваецца, якая з рэакцый сувязей найбольшая (найменшая), знаходзіцца іх напрамак, вызначаецца напрамак перамяшчэння цела і г. д. Для пошуку адказаў на якасныя пытанні, як правіла, не выкарыстоўваюцца матэматычныя залежнасці, а выконваецца паглыблены аналіз структуры механічных сістэм і знешніх уздзеянняў на іх. Адсутнасць руцінных разлікаў дазваляе прааналізаваць большую колькасць механічных сістэм, глыбей спасцігнуць механічную сутнасць вывучаемых з'яў. Пры гэтым у студэнтаў назапашваюцца доўгатэрміновыя веды, фарміруецца культура інжынернага мыслення і інжынерная інтуіцыя.

У метадычнай распрацоўцы «Статыка» каротка выкладзены асноўныя паняцці статыкі і некаторыя ўласцівасці сіл і пар, на падставе якіх можна рашаць шэраг задач, не складаючы ўмовы раўнавагі. Асноўны змест распрацоўкі складаюць два заданні для самастойнага выканання і шматлікія прыклады да іх. Змест кожнага прыклада самадастатковы для ўспрымання (без азнаямлення з папярэднімі прыкладамі). Заданні могуць выкарыстоўвацца таксама і на практычных занятках, для аўдыторных кантрольных работ, на экзаменах і г. д.

Аўтар удзячны загадчыку кафедры агульнанавуковых дысцыплін А. К. Гаўрылені за арганізацыю работы па падрыхтоўцы рукапісу дапаможніка, а таксама І. В. Ліс за набор тэксту і студэнту І. А. Валасных за якаснае афармленне рысункаў.

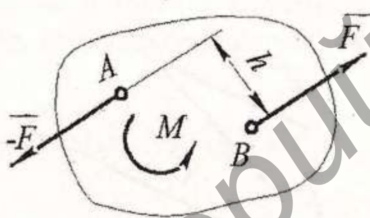
1 АСНОЎНЫЯ ПАНЯЦЦІ СТАТЫКІ

Вывучэнне статыкі пачынаецца з асноўных паняццяў і тэрміналогіі. Нагадаем іх.

1. Матэрыяльны аб'ект. Пад матэрыяльным аб'ектам будзем разумець цела або сістэму (сукупнасць) кантактуючых цел. У канкрэтных задачах матэрыяльнымі аб'ектамі могуць быць: матэрыяльны пункт, стрыжань, бэлька, рама, вагон, самалёт, чалавек і інш. У тэарэтычнай механіцы дэфармацыямі цел ігнаруюць, лічаць іх абсалютна цвёрдымі.

2. Механічныя сілы. Сіла ўяўляе сабой меру механічнага ўзаемадзеяння паміж матэрыяльнымі аб'ектамі. Паняцце сілы ўводзіцца перш за ўсё для колькаснага апісання велічыні гэтага ўзаемадзеяння. Адзінкамі сілы прыняты ньютан (Н) і кіланьютан (кН). Сіла характарызуецца велічынёй, напрамкам, пунктам прыкладання і лініяй дзеяння. Такім чынам, матэматычна яе можна прадставіць у выглядзе вектара. Як вядома, сілы бываюць знешнія (у адносінах да якога-небудзь аб'екта) і ўнутраныя, актыўныя і рэактыўныя (рэакцыі сувязей).

3. Пара сіл. Гэта сукупнасць дзвюх паралельных, роўных і процілегла накіраваных сіл (рыс. 1.1). Карацейшая адлегласць паміж лініямі дзеяння сіл называецца плячом пары h. Калі пару сіл прыкласці да цела, замацаванага на восі, то яна прыводзіць цела ў вярчальны рух. Дзеянне пары характарызуецца яе момантам $M = \pm Fh$. Пара з дадатным момантам імкнецца вярцець цела супраць руху стрэлкі гадзінніка. На рысунку пару сіл можна паказваць дугавой стрэлкай з абазначэннем яе моманта M (*гл.* рыс. 1.1).



Рысунак 1.1

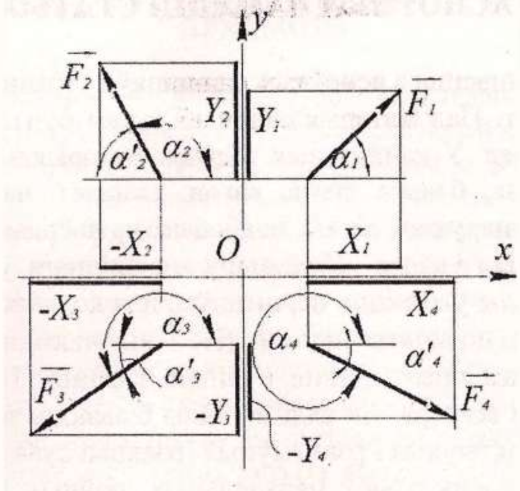
4. Сістэма сіл. Яна ўяўляе сабой сукупнасць сіл і пар, аб'яднаных па якой-небудзь прыкмеце. Напрыклад, сілы, прыкладзеныя да аднаго аб'екта, можна разглядаць як сістэму сіл. Калі лініі дзеяння ўсіх сіл, што ўтвараюць сістэму, паралельныя паміж сабой, то яе называюць паралельнай, а калі яны перасякаюцца ў адным пункце, — сыходнай. Усе астатнія сістэмы сіл называюць адвольнымі.

5. Раўнадзейная. Сіла або пара сіл, якая аказвае на аб'ект такое ж дзеянне, як і некаторая сістэма сіл, называецца *раўнадзейнай* гэтай сістэмы.

6. Ураўнаважвальная. Сіла або пара сіл, якая можа ўраўнаважыць дзеянне на цела некаторай сістэмы сіл, называецца *ўраўнаважвальнай* гэтай сістэмы. Яна роўная па велічыні і процілеглая па напрамку раўнадзейнай той жа сістэмы сіл.

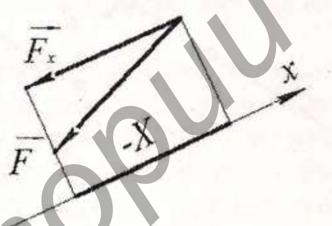
7. Ураўнаважаная сістэма сіл. Будзем лічыць, што цела знаходзіцца ў раўнавазе (ураўнаважана), калі яно нерухомае. Раўназначны яму стан раўнамернага прамалінейнага руху не разглядаем. Сістэма сіл, пад дзеяннем якой цела застаецца нерухомым, называецца *ўраўнаважанай*. Раўнадзейная ўраўнаважанай сістэмы сіл роўная нулю.

8. Праекцыя сілы на вось. Яна ўяўляе сабой алгебраічную велічыню, якая знаходзіцца па тым жа правіле, што і праекцыя любога вектара на вось. Напрыклад, праекцыі сіл, паказаных на рысунку 1.2, на каардынатныя восі вылічваюцца па формулах $X_i = F_i \cos \alpha_i$, $Y_i = F_i \sin \alpha_i$ (i = 1, 2, 3, 4). Пры рашэнні задач больш зручна выкарыстоўваць вострыя вуглы α_i'. Тады $X_2 = -F_2 \cos \alpha_2'$, $Y_2 = F_2 \sin \alpha_2'$, $X_3 = -F_3 \cos \alpha_3'$, $Y_3 = -F_3 \sin \alpha_3'$, $X_4 = F_4 \cos \alpha_4'$, $Y_4 = -F_4 \sin \alpha_4'$.



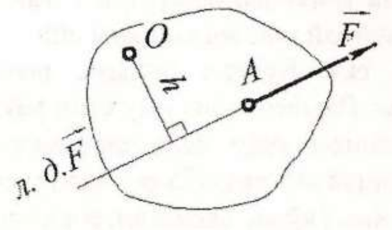
Рысунак 1.2

Каб хутка і беспамылкова ўстанавіць знак праекцыі, неабходна мысленна знайсці складальную сілы, паралельную адпаведнай восі. Калі яна накіравана ў той самы бок, што і вось, то мае знак «плюс». На рысунку 1.3 складальная F_x сілы F накіравана процілегла да восі. Таму яе праекцыя $X = F_x$ адмоўная.



Рысунак 1.3

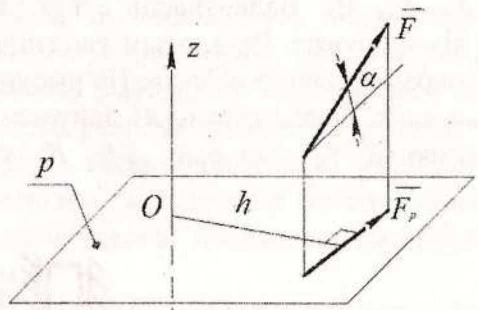
9. Момант сілы адносна пункта (цэнтра). Гэта алгебраічная велічыня $M_O(\vec{F})$, роўная здабытку сілы F на яе плячо h адносна цэнтра O: $M_O(\vec{F}) = \pm Fh$. Тут h — карацейшая адлегласць ад цэнтра O да лініі дзеяння сілы. Момант сілы прымаецца дадатным, калі сіла імкнецца павярнуць цела адносна цэнтра супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі. Вось стрэлкі змешчана у цэнтры O. На рысунку 1.4. момант дадатны.



Рысунак 1.4

10. Момант сілы адносна восі. Момант сілы F адносна восі Oz (рыс. 1.5) роўны моманту праекцыі гэтай сілы F_P на плоскасць P, перпендыкулярную да восі, адносна пункта перасячэння O восі з плоскасцю: $M_z(\vec{F}) = \pm F_P h$. Знак «плюс» тут прымаецца ў тым выпадку, калі дадатнага напрамку восі відаць, што сіла F_P імкнецца павярнуць плоскасць P адносна пункта O *упраць стрэлкі гадзінніка.*

Заўвага. Пры аналізе раўнавагі *плоскай* сістэмы сіл вызначаюць моманты сіл адносна цэнтраў, а *прасторавай* — адносна восей.



Рысунак 1.5

11. Галоўны вектар. Галоўным вектарам сістэмы n сіл называецца геаметрычная сума ўсіх сіл, якія ўваходзяць у гэтую сістэму: $\vec{R} = \sum \vec{F_i}$. Па такой жа формуле знаходзіцца і раўнадзейная, але, у адрозненне ад яе, галоўны вектар не мае вызначанай лініі дзеяння.

12. Галоўны момант. Галоўным момантам сістэмы n сіл адносна цэнтра O называецца алгебраічная сума момантаў усіх сіл, якія ўваходзяць у сістэму, адносна гэтага цэнтра:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F_i}).$$

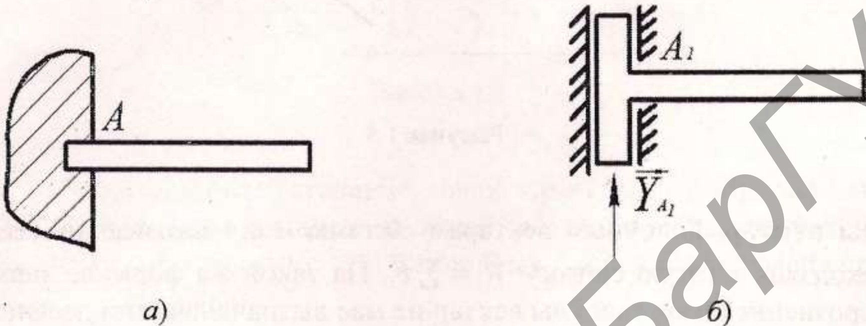
13. Свабодныя і несвабодныя матэрыяльныя аб'екты. Матэрыяльны аб'ект называецца *свабодным*, калі яго рух не абмежаваны другімі аб'ектамі (целамі). Калі ж рух матэрыяльнага аб'екта часткова або цалкам абмежаваны, то яго называюць *несвабодным*.

14. Сувязі. Целы, што прылягаюць да якога-небудзь матэрыяльнага аб'екта і абмяжоўваюць яго перамяшчэнні, называюцца *сувязямі*, накладзенымі на аб'ект. Сувязі могут быць *знешнімі* і *ўнутранымі*. Унутраныя сувязі перашкаджаюць узаемнаму перамяшчэнню цел, што ўваходзяць у механічную сістэму. Сукупнасць сувязей, накладзеных на матэрыяльны аб'ект, называецца *сістэмай сувязей*.

15. Рэакцыі сувязей. Калі да несвабоднага матэрыяльнага аб'екта прыкласці сілы, то іх дзеянне перадаецца праз аб'ект і на сувязі — аб'ект узаемадзейнічае з імі. Сілы ўзаемадзеяння, якія ўзнікаюць у адпаведнасці з аксіёмай статыкі і перадаюцца ад сувязей на матэрыяльны аб'ект, называюцца *рэакцыямі сувязей*.

16. Валентнасць сувязей. Механічныя сувязі адрозніваюцца сваімі абмежавальнымі ўласцівасцямі. Яны могуць абмяжоўваць як пастулальныя, так і вярчальныя перамяшчэнні аб'екта. Напрыклад, нерухомы цыліндрычны шарнір абмяжоўвае два пастулальныя перамяшчэнні аб'екта; слізгальная замацоўка не дапускае адно пастулальнае і адно вярчальнае перамяшчэнні. А плоская жорсткая замацоўка абмяжоўвае два ўзаемаперпендыкулярныя пастулальныя перамяшчэнні і паварот аб'екта — цела не рухаецца. *Колькасць абмежаванняў, якія накладвае сувязь на матэрыяльны аб'ект, называецца валентнасцю сувязі.* Будзем абазначаць яе літарай v (ад слова *valentia* сіла). Такім чынам, валентнасць нерухомага цыліндрычнага шарніра і слізгальнай замацоўкі роўная двум (v = 2), а плоскай жорсткай замацоўкі — тром (v = 3). Інфармацыя аб сувязях змешчана ва ўсіх падручніках па тэарэтычнай механіцы [1; 2]. Віды плоскіх сувязей, іх апісанне і валентнасць прыведзены таксама ў метадычным дапаможніку [3, с. 8—12]. Сістэма сувязей характарызуецца іх сумарнай валентнасцю. Рухомасць, нерухомасць і ступень статычнай невызначальнасці механічнай сістэмы залежаць ад сумарнай валентнасці накладзеных на яе сувязей і структуры.

З азначэння валентнасці вынікае, што *колькасць кампанентаў рэакцыі сувязі роўная яе валентнасці*. Напрыклад, для жорсткай замацоўкі (абазначым яе літарай A) $v = 3$; столькі ж і кампанентаў яе рэакцыі — X_A, Y_A, M_A. Валентнасць сувязі, накладзенай на аб'ект, можна панізіць, часткова вызваліўшы яго ад сувязі. Пры гэтым уводзіцца кампанент яе рэакцыі, адпаведны атрыманаму магчымаму перамяшчэнню аб'екта. На рысунку 1.6, *а*, валентнасць сувязі A зніжана на адзінку — з трох да двух. Новая сувязь A_1 дапускае вертыкальнае перамяшчэнне. Адпаведны яму кампанент рэакцыі Y_{A_1} (*гл.* рыс. 1.6, *б*) утрымлівае аб'ект ад такога перамяшчэння.



Рысунак 1.6

17. Складаныя механічныя сістэмы. *Механічныя сістэмы, утвораныя з некалькіх матэрыяльных аб'ектаў — целаў, матэрыяльных пунктаў, — называюцца складанымі.* У складанай сістэме асобныя целы злучаюцца паміж сабой з дапамогай *унутраных* сувязей. А для замацоўкі ўсёй сістэмы на нерухомай аснове (падмурку) выкарыстоўваюцца *знешнія* сувязі (апоры).

18. Умовы раўнавагі. Калі матэрыяльны аб'ект пад дзеяннем некаторай сістэмы сіл знаходзіцца ў раўнавазе, то галоўны вектар R_O і галоўны момант гэтай сістэмы сіл M_O адносна адвольнага цэнтра O роўны нулю. Калі ўвесці восі каардынат $Oxyz$ з пачаткам у цэнтры O і спраецыраваць на іх вектары $\vec{R}_O$ і $\vec{M}_O$, то атрымаем умовы раўнавагі сістэмы сіл (ці аб'екта, на які яна дзейнічае). Для плоскай сістэмы сіл яны запісваюцца ў трох формах:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum M_A(\vec{F_i}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\sum X_i = 0; \sum M_A(\vec{F_i}) = 0; \sum M_B(\vec{F_i}) = 0, \tag{1.2}$$

$$\sum M_A(\vec{F_i}) = 0; \sum M_B(\vec{F_i}) = 0; \sum M_C(\vec{F_i}) = 0. \tag{1.3}$$

Для прасторавай сістэмы сіл атрымліваем:

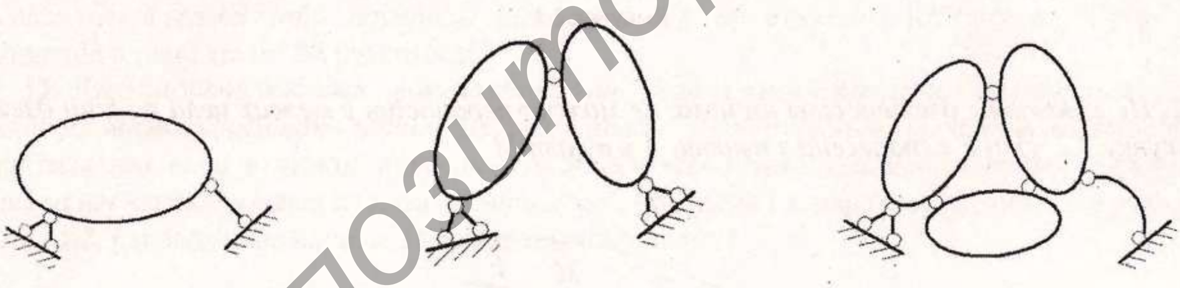
$$\begin{gathered}\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0;\\ \sum M_x(\vec{F_i}) = 0; \sum M_y(\vec{F_i}) = 0; \sum M_z(\vec{F_i}) = 0.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Ва ўраўненнях (1.1)—(1.4) літарамі X_i, Y_i, Z_i і $M(\vec{F_i})$ абазначаны праекцыі сілы F_i на восі каардынат і яе моманты адносна цэнтраў і восей.

19. Аб'ект раўнавагі. Рашэнне большасці задач статыкі пачынаецца з выбару аб'екта раўнавагі, для якога запісваюцца ўмовы (1.1)—(1.4). Ад рацыянальнага выбару аб'екта раўнавагі залежыць поспех у рашэнні задачы. Аб'ектам раўнавагі можа быць адно цела (ці матэрыяльны пункт), сукупнасць цел ці ўся механічная сістэма. Асноўная прыкмета аб'екта раўнавагі: *да яго* *прыкладзены зададзеныя знешнія і невядомыя сілы* (у тым ліку і рэакцыі сувязей). Калі механічная сістэма ўяўляе адно цела, то яно і з'яўляецца аб'ектам раўнавагі. У сілавым аналізе складаных механічных сістэм часта патрэбна разглядаць раўнавагу некалькіх аб'ектаў.

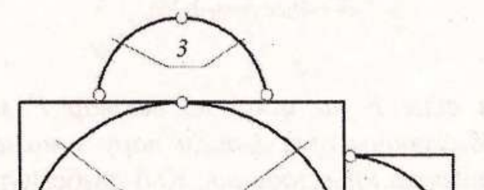
20. Плоскія статычна вызначальныя механічныя сістэмы. Калі ўсе целы, што ўтвараюць складаную механічную сістэму, маюць агульную плоскасць сіметрыі, у якой дзейнічае прыкладзеная да сістэмы нагрузка, то механічную сістэму называюць *плоскай*. У статыцы вывучаюцца толькі ўраўнаважаныя (нерухомыя) сістэмы. У сілавым аналізе такіх сістэм невядомымі велічынямі, як правіла, з'яўляюцца сілы, у тым ліку і рэакцыі сувязей. Для іх вызначэння выкарыстоўваюцца алгебраічныя ўраўненні — умовы раўнавагі. Механічная сістэма, у якой усе невядомыя сілы могуць быць знойдзены з умоў раўнавагі, называецца *статычна вызначальнай*. Такую ж назву маюць і адпаведныя задачы сілавога аналізу сістэм. Пры гэтым *колькасць умоў раўнавагі роўная колькасці невядомых сіл*. Гэта асноўная прыкмета статычна вызначальных механічных сістэм.

21. Структура плоскіх статычна вызначальных сістэм. Устанавіць статычную вызначальнасць можна без запісу ўмоў раўнавагі і без падліку невядомых сіл, а шляхам аналізу структуры складанай механічнай сістэмы. Абмяжуемся аналізам найбольш распаўсюджаных варыянтаў структуры нерухомых сістэм. У якасці структурных элементаў сістэм будзем разглядаць наступныя *першасныя* (найпрасцейшыя) падсістэмы: адно цела з трохвалентнай сістэмай сувязей далучэння; два целы, злучаныя паміж сабой двухвалентнай сувяззю, з чатырохвалентнай сістэмай сувязей далучэння (кожнае цела з двухвалентнай сувяззю) (*дыяда*); тры целы, злучаныя шарнірамі ці слізгальнымі замацоўкамі, з трохвалентнай сістэмай сувязей далучэння? накладзеных на розныя целы (рыс. 1.7). У складанай сістэме кожны структурны элемент можа займаць адзін з трох наступных *узроўняў*: *першы* (ніжэйшы), *другі* (прамежкавы) і *трэці* (вышэйшы). Элемент першага ўзроўню ўсімі сувязямі далучэння замацаваны на жорсткай аснове; элемент другога ўзроўню толькі часткай сувязей далучэння злучаны з падмуркам; падсістэма трэцяга ўзроўню злучаецца толькі з элементамі ніжэйшых узроўняў. Падсістэмы першага ўзроўню інакш будзем называць *базіснымі*, а трэцяга — *надбудаванымі*. У механічнай сістэме (рыс. 1.8) узроўні элементаў абазначаны адпаведнымі лічбамі (1, 2, 3). З іх падсістэмы 1



а) б) в)

Рысунак 1.7



Рысунак 1.8

і 3 — дыяды. Адзначым адну істотную асаблівасць структурных элементаў ніжэйшага ўзроўню: *дзеянне нагрузкі, прыкладзенай да базісных падсістэм, не перадаецца на структурныя элементы вышэйшых узроўняў*. Больш падрабязна структура плоскіх статычна вызначальных сістэм аналізуецца ў вучэбна-метадычным дапаможніку [3].

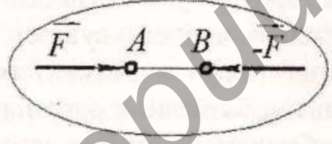
Пасля ўведзеных тут паняццяў аб падсістэмах можна наступным чынам удакладніць прыведзенае ў п. 17 (*гл.* с. 8) паняцце складанай механічнай сістэмы: *складанай называецца механічная сістэма, утвораная з некалькіх структурных элементаў.*

Для сцісласці апісання падсістэм, якія утвараюць складаныя механічныя сістэмы, будзем характарызаваць іх «статус» дзвюма лічбамі, запісанымі праз кропку: першай — колькасць цел у першаснай падсістэме, другой — узровень падсістэм. Тады назвы структурных элементаў механічнай сістэмы, што на рысунку 1.8 можна канкрэтызаваць наступным чынам: базісная — 2.1, надбудаваная — 2.3, прамежкавая — 1.2.

2 НЕКАТОРЫЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ СІЛ І ПАР

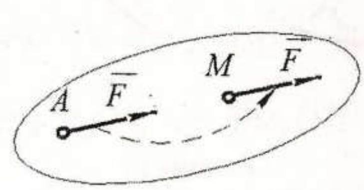
Прывядзём некаторыя ўласцівасці сіл і пар для іх выкарыстання ў сілавым аналізе механічных сістэм.

1. *Калі цела знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл, то гэтыя сілы роўныя па велічыні і накіраваны па адной лініі ў процілеглыя бакі (рыс. 2.1).*



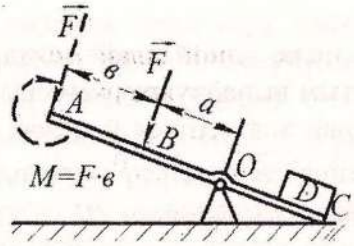
Рысунак 2.1

2. *Не змяняючы дзеяння сілы на цела, яе можна пераносіць у межах цела па лініі дзеяння. На рысунку 2.2. сіла F перанесена з пункта A ў пункт M.*



Рысунак 2.2

3. *Не змяняючы дзеяння сілы F на цела, яе вектар F можна пераносіць паралельна з аднаго пункта ў іншы, прыбаўляючы пры гэтым пару з момантам M, які роўны моманту дадзенай сілы адносна новага пункта прыкладання.* Каб пазбегнуць памылкі ў выбары напрамку далучанай пары M, высветлім на прыкладзе яе паходжанне. На рысунку 2.3 паказаны рычаг AC, які выкарыстоўваецца для падымання груза D. Плячо сілы F адносна пункта O спачатку было роўна $h_O = a$, а яе момант $M_O = Fh_O = Fa$. Пасля пераносу сілы ў пункт A плячо ўзрасло: $h_1 = a + b$; новы момант сілы $M_1 = F(a + b) = Fa + Fb$. Як бачым, першапачатковы момант M_O павялічыўся на $M' = Fb$. А каб дзеянне сілы не змянілася пасля пераносу, да яе далучаецца пара $M = -M'$. Тут знак «–» азначае, што момант далучанай пары M процілеглы па накірунку моманту перанесенай сілы адносна першапачатковага пункта прылажэння B.



Рысунак 2.3

4. *Дзве сілы, прыкладзеныя да пункта цела, можна замяніць раўнадзейнай сілай, велічыня і лінія дзеяння якой вызначаюцца дыяганаллю паралелаграма, пабудаванага на зададзеных сілах. Справядліва і адваротнае сцвярджэнне: сілу, якая дзейнічае на цела, можна прадставіць у выглядзе дзвюх складаемых сіл па любых зададзеных напрамках у плоскасці яе дзеяння.*

5. *Калі сістэма трох непаралельных сіл (або цела, да якога сістэма прыкладзена) знаходзіцца ў раўнавазе, то яна ўяўляе плоскую сыходную сістэму сіл, гэта значыць, лініі дзеяння ўсіх сіл перасякаюцца ў адным пункце.*

6. *Калі сістэма **n** сіл F_1, F_2, ..., F_{n-1}, F_n знаходзіцца ў раўнавазе і пры гэтым ($n - 1$) сілы паралельныя паміж сабой, то і сіла F_n паралельная да іх (або роўная нулю).* У прыватнасці, пры $n = 3$, калі сілы F_1 і F_2 паралельныя паміж сабой, то і сіла F_3 паралельная да іх.

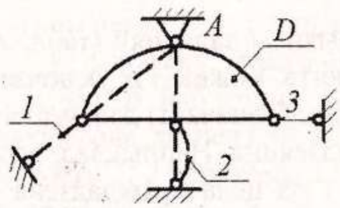
7. *Адвольную сістэму **n** сіл у агульным выпадку можна прывесці да аднаго цэнтра O і такім чынам замяніць яе адной сілай R_O, роўнай галоўнаму вектару сістэмы, і адной парай M_O, роўнай яе галоўнаму моманту адносна цэнтра O.*

8. *Для ўраўнаважанай адвольнай сістэмы сіл яе галоўны вектар і галоўны момант адносна любога цэнтра O роўныя нулю:* $\vec{R}_O = 0, \vec{M}_O = 0$.

9. *Пара сіл можа быць ураўнаважана толькі сістэмай сіл, якая прыводзіцца да пары, або іншай парай.*

10. *Раўнавага несвабоднага цела не парушыцца, калі панізіць валентнасць накладзенай на яго сістэмы сувязей (або поўнасцю вызваліць яго ад сувязей).* Кожная адкінутая сувязь замяняецца адпаведнымі ёй рэакцыямі.

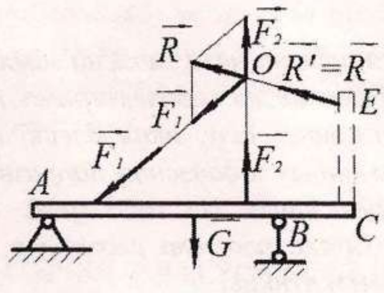
11. *Дзве аднавалентныя накладзеныя на цела сувязі-стрыжні, змешчаныя ў адной плоскасці, можна замяніць адной двухвалентнай — нерухомым цыліндрычным шарнірам, змясціўшы яго вось у пункце перасячэння ліній узаемадзеяння аднавалентных сувязей. Вось цыліндра перпендыкулярная плоскасці стрыжняў.* Магчыма і адваротнае дзеянне. На рысунку 2.4 сувязі *1* і *2*, накладзеныя на цела *D*, заменены шарнірам *A*.



Рысунак 2.4

12. *Рэакцыя сувязі, што накладзена на матэрыяльны аб'ект, выкліканая дзеяннем якой-небудзь сістэмы сіл, роўная геаметрычнай суме рэакцый, якія выкліканы дзеяннем кожнай сілы паасобку.*

13. *Не змяняючы стану раўнавагі матэрыяльнага аб'екта, можна пашырыць яго габарыты.* Фармальная неабходнасць у гэтым узнікае часам пры рашэнні задач. Напрыклад, пры замене сістэмы сіл, што прыкладзена да цела, адной сілай можа атрымацца, што яе лінія дзеяння праходзіць па-за межамі цела. У гэтым выпадку яго размеры можна ўяўна змяніць такім чынам, каб пункт прыкладання раўнадзейнай знаходзіўся ў межах габарытаў «пашыранага» цела. На рысунку 2.5 лінія дзеяння раўнадзейнай $\vec{R}$ сіл $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ праходзіць па-за бэлькай AC. Уласцівасць 13 дазваляе дапоўніць бэльку фіктыўным участкам CE, а уласцівасць 2 — перанесці вектар $\vec{R}$ з пункта O ў пункт E. Вага бэлькі і становішча цэнтра цяжару не змяняюцца.



Рысунак 2.5

3 ПРЫКЛАДЫ ВЫКАНАННЯ ЗАДАННЯЎ

ЗАДАННЕ 1

Ва ўсіх варыянтах заданняў аб'ектамі раўнавагі з'яўляюцца плоскія і прасторавыя механічныя сістэмы: бэлькі, рамы і целы розных формаў. Кожны аб'ект знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем аднаго з сілавых фактараў: засяроджанай сілы F_i, моманта M_i або размеркаванай нагрузкі максімальнай інтэнсіўнасці q_i.

Неабходна:

1. Вызначыць назвы сувязей і іх валентнасць.
2. Устанавіць сапраўдны напрамак рэакцый сувязей (апораў), сыходзячы з іх механічнай сутнасці: рэакцыя сувязі — сіла процідзеяння знешнім нагрузкам.
3. Праверыць вызначаны напрамак рэакцый сувязей, склаўшы для вызначэння кожнай з іх адну ўмову раўнавагі.

У дадатку А прыведзены варыянты заданняў (табл. А.1) і схемы да задання (рыс. А.1). Выкладчыкам задаецца нумар варыянта. Кожны з іх уключае дзве задачы: плоскую і прасторавую механічную сістэму. У табліцы задачы абазначаны дзвюма лічбамі (i, k), дзе i — нумар схемы на рысунку А.1, k — нумар сілавога ўздзеяння. Напрыклад, варыянт 1 змяшчае задачы 1, 10; 21, 1. Нумары азначаюць, што на схеме 1 да цела прыкладзена сіла q_{10}, а на схеме 21 на вузел A дзейнічае сіла F_1. У задачы 5, 7 да цела (кола) на схеме 5 прыкладзена раўнамерна размеркаваная нагрузка інтэнсіўнасці q_7, а ў задачы 3, 2 на стрыжань дзейнічае пара M_2.

Пасля атрымання варыянта задання студэнту неабходна:

1) перанесці схему механічнай сістэмы ў сшытак, захаваўшы на ёй толькі сваю зададзеную нагрузку;

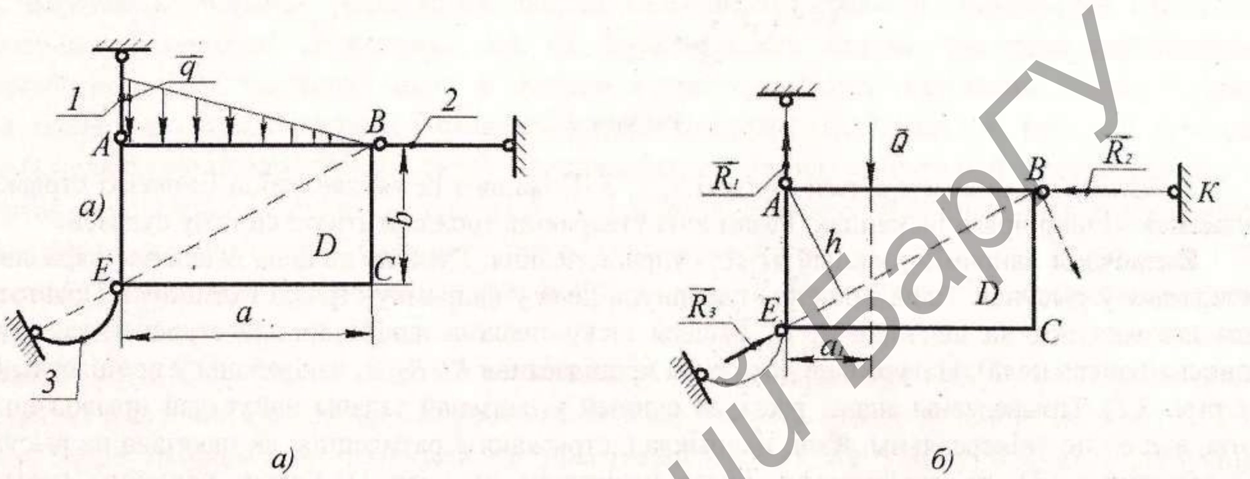
2) абазначыць лічбамі або літарамі ўсе сувязі, устанавіць іх назвы і валентнасць;

3) вызначыць сапраўдны напрамак рэакцый сувязей шляхам аналізу напрамкаў *дзеяння* (нагрузкі) і *процідзеяння* з боку сувязей;

4) праверыць вынік, склаўшы для вызначэння кожнай рэакцыі *адну* ўмову раўнавагі. Калі рэакцыя атрымаецца дадатнай, то яе напрамак правільны.

Для паспяховага выканання задання неабходна ўважліва вывучыць зададзеную схему механічнай сістэмы; пры неабходнасці правесці з ёю ўяўны эксперымент, гэта значыць, уяўна паўздзейнічаць на аб'ект раўнавагі ўласнымі рукамі і спрагназаваць процідзеянне з боку накладзеных на яго сувязей. Пры выкананні п. 3 трэба ўлічваць, што калі ў механічнай сістэме стрыжань (сувязь) пад уздзеяннем нагрузкі расцягваецца, то яго рэакцыя накіравана ад аб'екта раўнавагі (ад цела), а калі сціскаецца, то наадварот — да аб'екта. Большасць задач маюць некалькі варыянтаў рашэння (разважання). У прыведзеных ніжэй прыкладах, як правіла, апісаны адзін з іх.

Прыклад 1. На цела *D* прамавугольнай формы дзейнічае нагрузка, размеркаваная па лінейнаму закону (рыс. 3.1, *а*). Яе максімальная інтэнсіўнасць роўная *q*. Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Рысунак 3.1

Рашэнне. Абазначаем сувязі лічбамі *1*, *2*, *3*. Размеркаваную нагрузку замяняем раўнадзейнай сілай $Q = qa / 2$. Яе лінія дзеяння праходзіць на адлегласці $a_1 = a / 3$ ад левага краю цела (*гл.* рыс. 3.1, *б*). У гэтай задачы *Q* — *дзеянне* на механічную сістэму.

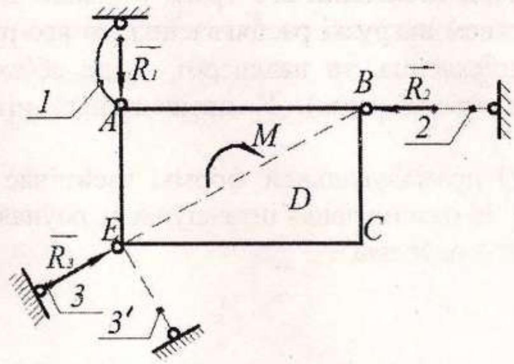
Аналізуем сувязі. Кожная з іх ўяўляе сабой бязважкі стрыжань з ідэальнымі шарнірамі на канцах. Разам яны ўтвараюць трохвалентную сістэму сувязей, накладзеных на аб'ект раўнавагі *D*.

Вызначаем напрамкі рэакцый — сіл *процідзеяння*. Паводле ўласцівасцей сувязей-стрыжняў лініі дзеяння іх рэакцый праходзяць праз шарніры. Пры гэтым рэакцыя можа быць накіравана ад матэрыяльнага аб'екта або да яго. Вызначым напрамак рэакцыі R_1. Калі на рысунку 3.1, *б*, уяўна на імгненне адкінуць стрыжань *1*, то вугал *A* цела *D* пад дзеяннем сілы *Q* пачне апускацца. Стрыжань будзе аказваць процідзеянне такому перамяшчэнню. Таму яго рэакцыя R_1 накіравана ўверх. Адкінем уяўна стрыжань *2*. Тады цела *D* у першы момант будзе паварочвацца вакол пункта *E*, а пункт *B* пачне рухацца ў напрамку, паказаным на рысунку 3.1, *б*, пункцірнай стрэлкай. Пры такім перамяшчэнні пункт *B* наблізіцца да пункта *K*, а стрыжань *2* павінен сціснуцца. Таму яго процідзеянне накіравана да цела *D*. Для вызначэння напрамку рэакцыі R_3 выкарыстаем уласцівасць 11: заменім сувязі *1*, *2* нерухомым цыліндрычным шарнірам, змясціўшы яго ў пункце *A*. Цяпер, калі ўяўна адкінем сувязь *3*, то пад дзеяннем сілы *Q* цела *D* будзе паварочвацца вакол пункта *A* ў напрамку руху стрэлкі гадзінніка. Для раўнавагі цела процідзеянне R_3 стрыжня *3* павінна быць накіравана супраць руху стрэлкі гадзінніка (*гл.* рыс. 3.1, *б*).

Правяраем напрамкі рэакцый з дапамогай ураўненняў раўнавагі. Ураўненні складаем такім чынам, каб кожнае з іх утрымлівала толькі адну невядомую рэакцыю: $\sum M_B\left(\overrightarrow{F_i}\right) = -R_1 a + Q(a - a_1) = 0$; $\sum M_E\left(\overrightarrow{F_i}\right) = R_2 b - Q a_1 = 0$; $\sum M_A\left(\overrightarrow{F_i}\right) = R_3 h - Q a_1 = 0$.

Адсюль $R_1 = Q(a - a_1) / a$; $R_2 = Q a_1 / b$; $R_3 = Q a_1 / h$. Паколькі рэакцыі атрымаліся дадатныя, то іх напрамкі ўстаноўлены правільна.

Прыклад 2. На цела D прамавугольнай формы дзейнічае пара сіл, момант якой роўны M (рыс. 3.2). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей.



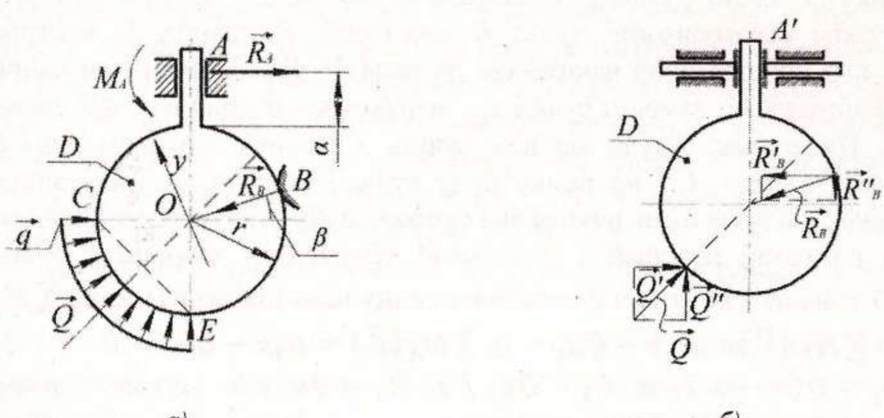
Рысунак 3.2

Рашэнне. Абазначаем сувязі лічбамі *1*, *2*, *3*. Кожная з іх уяўляе сабой бязважкі стрыжань з ідэальнымі шарнірамі на канцах. Разам яны ўтвараюць трохвалентную сістэму сувязей.

Вызначаем напрамкі рэакцый як сіл супрацьдзеяння. Дзеянне на цела D аказвае пара сіл M. Угледзімся ў рысунак. Пара імкнецца павярнуць цела ў напрамку стрэлкі гадзінніка. Пры гэтым цела аказвае ціск на шарніры A, B, E; сілы ціску таксама накіраваны за стрэлкай гадзінніка (адносна цэнтра цела). Натуральна, што сілы процідзеяння R_1, R_2, R_3 накіраваны ў процілеглы бок (*гл.* рыс. 3.2). Прыведзены аналіз рэакцый сувязей у дадзенай задачы найхутчэй прыводзіць да мэты, але ён не ўніверсальны. Калі, напрыклад, стрыжань *3* размясціць, як паказана на рысунку 3.2 пункцірам ($3'$), то яго рэакцыя будзе накіравана ад цела D. Больш надзейны падыход выкладзены ў папярэднім прыкладзе пры вызначэнні рэакцыі R_3. Так, для вызначэння напрамку рэакцыі R_1 сувязі *2* і *3* замяняем нерухомым цыліндрычным шарнірам у пункце B (на рысунку 3.2 ён супадае з шарнірам B). Пара M імкнецца павярнуць цела адносна гэтага шарніра ў напрамку руху стрэлкі гадзінніка. Каб цела заставалася ў раўнавазе, рэакцыя R_1 павінна быць накіравана супраць такога руху. Па аналогіі, уяўна замяняючы аднавалентныя сувязі *1*, *3* і *1*, *2* шарнірамі, змешчанымі адпаведна ў пунктах E і A, знаходзім напрамкі рэакцый R_2, R_3.

Правяраем напрамкі рэакцый з дапамогай ураўненняў раўнавагі. Як відаць на рысунку 3.2, на цела D дзейнічае адвольная плоская сістэма сіл. Для яе можна запісаць тры наступныя ўмовы раўнавагі: $\sum M_A(\overrightarrow{F_i}) = R_3 h - M = 0$; $\sum M_B(\overrightarrow{F_i}) = R_1 a - M = 0$; $\sum M_E(\overrightarrow{F_i}) = R_2 b - M = 0$. Адсюль знаходзім: $R_1 = M / a$; $R_2 = M / b$; $R_3 = M / h$. Як бачым, усе рэакцыі сувязей дадатныя. Гэта сведчыць аб тым, што ўстаноўленыя напрамкі рэакцый правільныя.

Прыклад 3. На цела D з кансольным выступам уверсе дзейнічае раўнамерна размеркаваная нагрузка інтэнсіўнасці q (рыс. 3.3, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей.



а) *б)*

Рысунак 3.3

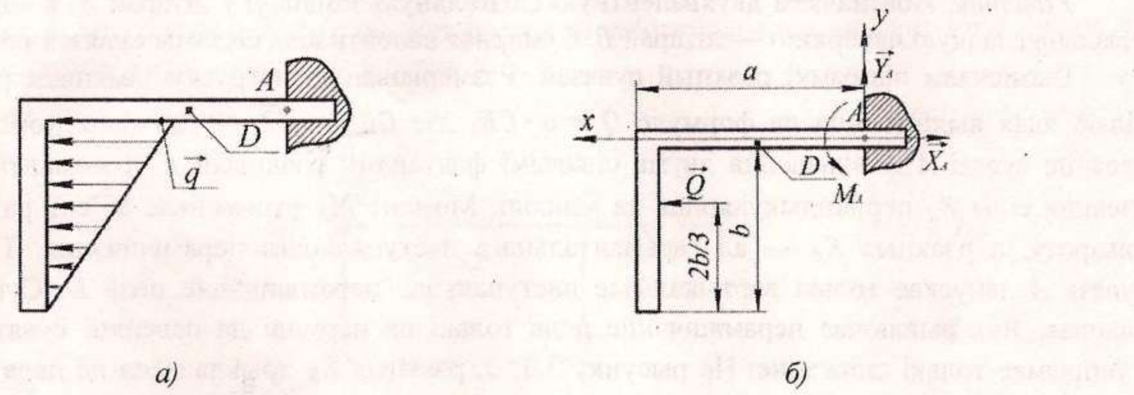
Рашэнне. Абазначаем двухвалентную слізгальную замацоўку літарай A, а аднавалентную ідэальна гладкую паверхню — літарай B. Сумарная валентнасць сістэмы сувязей роўная тром.

Вызначаем напрамкі рэакцый сувязей. Размеркаваную нагрузку замяняем раўнадзейнай сілай, якая вылічваецца па формуле $Q = q \cdot CE$, дзе $CE = r\sqrt{2}$ — даўжыня хорды. Супрацьдзеянне сувязі A вызначаецца двума сілавымі фактарамі: рэакцыяй R_A і момантам M_A. Лінія дзеяння сілы R_A перпендыкулярная да кансолі. Момант M_A утрымлівае аб'ект раўнавагі D ад павароту, а рэакцыя R_A — ад гарызантальнага пастунальнага перамяшчэння. Такім чынам, сувязь A дапускае толькі вертыкальнае пастунальнае перамяшчэнне цела D. Сувязь B аднабаковая. Яна выключае перамяшчэнне цела толькі па нармалі да паверхні сувязі (або цела) і ўспрымае толькі сціскане. На рысунку 3.3, *а*, рэакцыя R_B прыкладзена да цела ў пункце B. Каб вызначыць напрамак рэакцыі R_A, панізім валентнасць сувязі A: заменім яе падвойнай слізгальнай замацоўкай A' (*гл.* рыс. 3.3, *б*). Сувязь A', як вядома, дапускае пастунальнае перамяшчэнне (без павароту) цела ў любым напрамку. Аднак наяўнасць сувязі B будзе абмяжоўваць яго перамяшчэнне. Правядзём уяўны эксперымент. Заўважым, што пад дзеяннем сілы Q цела будзе перамяшчацца ўверх і адначасова, слізгаючы па сувязі B, пасоўвацца ўлева. Супрацьдзеянне такому руху — рэакцыя R_A — накіравана ўправа. Як бачым, напрамак вектара R_A залежыць ад магчымага напрамку перамяшчэння кансолі — улева або ўправа. А гэты напрамак, у сваю чаргу, вызначаецца становішчам сувязі B. На рысунку 3.3, *б*, яна знаходзіцца ніжэй лініі дзеяння сілы Q, ціск кансолі на сувязь A накіраваны (як і яе магчымае перамяшчэнне) улева. Калі ж сувязь B усталяваць вышэй лініі дзеяння сілы Q, то напрамкі ціску на сувязь і рэакцыі R_A зменяцца на процілеглыя. Калі змясціць сувязь B на лініі дзеяння сілы Q, то яна будзе ўраўнаважана рэакцыяй R_B; пры гэтым $R_B = Q$, $R_A = M_A = 0$. Каб не дапусціць памылкі пры вызначэнні магчымага перамяшчэння кансолі і адпаведнага напрамку вектара R_A, неабходна мысленна раскласці вектары Q і R_B на кампаненты R_B', R_B'' і Q', Q'' (*гл.* рыс. 3.3, *б*). Гарызантальнаму дзеянню складальнай Q' на аб'ект D адпавядае гарызантальнае процідзеянне R_B', вертыкальнаму Q'' — вертыкальнае R_B''. Як відаць з рысунка, $Q' = Q''$, $R_B'' < R_B'$, гэта значыць вертыкальнаму дзеянню Q'' адпавядае меншае супрацьдзеянне R_B'', таму цела D будзе перамяшчацца па напрамку вектара Q'' уверх і, слізгаючы па сувязі B, зрушвацца ўлева. Заўважым, калі сувязь B будзе накладзена на цела вышэй лініі дзеяння сілы Q, то $R_B' < R_B''$ і кансоль разам з целам будуць рухацца ўправа і ўніз.

Знойдзем цяпер напрамак рэактыўнай пары M_A. Як вышэй адзначалася, яна процідзейнічае павароту цела D. З рысунка 3.3, *а*, відаць, што сіла Q імкнецца павярнуць цела па стрэлцы гадзінніка адносна пункта K (на рысунку не паказаны) перасячэння ліній дзеяння рэакцый R_A, R_B, бо лінія дзеяння Q праходзіць злева ад яго — па стрэлцы гадзінніка. Таму рэактыўная пара накіравана супраць руху стрэлкі гадзінніка.

Правяраем устаноўленыя напрамкі рэакцый сувязей з дапамогай ураўненняў раўнавагі. Запісваем іх такім чынам, каб кожнае ўраўненне ўтрымлівала толькі адну невядомую рэакцыю. Вось Oy праводзім перпендыкулярна да вектара R_B. У якасці цэнтра момантаў прымаем пункт K (аб ім напісана тут вышэй). Атрымліваем: $\sum Y_i = Q\cos(\beta + 45^\circ) - R_A\cos(90^\circ - \beta) = 0$; $\sum M_K(\vec{F_i}) = M_A - Qh = 0$, дзе h — плячо сілы Q адносна цэнтра K. Адсюль знаходзім: $R_A = \frac{Q\cos(\beta+45^\circ)}{\cos(90^\circ-\beta)}$; $M_A = Qh$. Паколькі рэакцыі атрыманы дадатныя, то іх напрамкі знойдзены правільна.

Прыклад 4. Ломаны стрыжань D замацаваны адным канцом у сцяне і нагружаны размеркаванай па лінейнаму закону нагрузкай, максімальная інтэнсіўнасць якой роўная q (рыс. 3.4, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязі на падставе іх механічнага сэнсу.



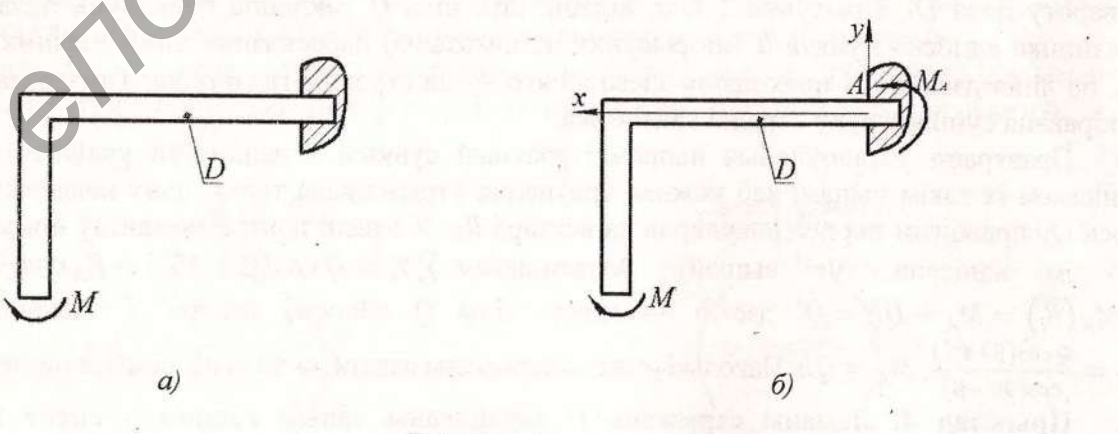
Рысунак 3.4

Рашэнне. Даўжыні ўчасткаў стрыжня D абазначаем літарамі a, b. Размеркаваную нагрузку замяняем раўнадзейнай сілай Q, велічыня якой роўная плошчы трохвугольніка са старанамі b, q: $Q = bq / 2$. Лінія дзеяння сілы Q праходзіць праз цэнтр цяжару трохвугольніка (*гл.* рыс. 3.4, *б*). Трохвалентную сувязь, якая называецца жорсткай замацоўкай, абазначым літарай A.

Уводзім сістэму восей каардынат Axy. З тэорыі вядома, што ў агульным выпадку рэакцыя сувязі A трохкампанентная: яна складаецца з дзвюх рэактыўных сіл X_A, Y_A, што ўтрымліваюць цела D ад паступальнага перамяшчэння ўздоўж восей каардынат Ax, Ay, і рэактыўнай пары M_A, якая ўтрымлівае яго ад павароту. Напрамкі рэакцый вызначаем як сілы процідзеяння, а дзеянне на цела аказвае сіла Q. Яна імкнецца зрушыць яго паступальна ўлева ўздоўж восі Ax і павярнуць адносна замацоўкі A за рухам стрэлкі гадзінніка, таму сіла X_A накіравана ўправа, а рэактыўная пара M_A — супраць руху стрэлкі гадзінніка. Гарызантальная сіла Q не можа рухаць цела D у вертыкальным напрамку, таму адпаведнае процідзеянне адсутнічае: $Y_A = 0$.

Для праверкі напрамкаў рэакцый X_A, M_A складаем умовы раўнавагі: $\sum X_i = Q - X_A = 0$; $\sum M_A(\overrightarrow{F_i}) = M_A - \frac{Qb}{3} = 0$ (таўшчынёй стрыжня ігнаруем). Адсюль $X_A = Q$; $M_A = Qb / 3$. Прыходзім да высновы: паколькі X_A, M_A дадатныя, то іх напрамкі на рысунку 3.4, *б* правільныя.

Прыклад 5. Ломаны стрыжань D замацаваны нерухома адным канцом у сцяне, а на другім нагружаны парай сіл, момант якой роўны M (рыс. 3.5, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязі, кіруючыся іх механічным сэнсам.



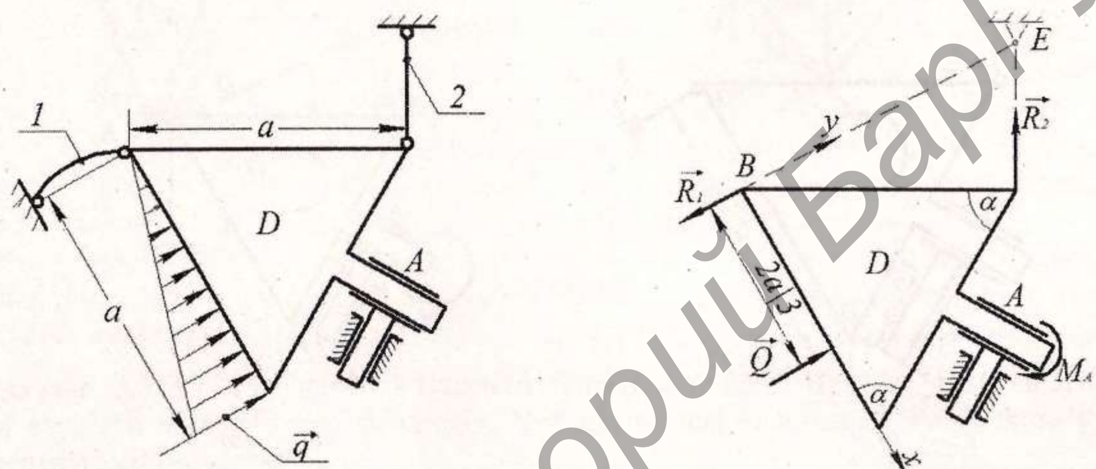
Рысунак 3.5

Рашэнне. Накладзеную на цела D сувязь, якая называецца жорсткай замацоўкай, абазначым літарай A. Валентнасць сувязі роўная тром, таму што яна ўтрымлівае цела ад трох перамяшчэнняў: двух узаемаперпендыкулярных паступальных і ад павароту.

Вызначаем напрамкі рэакцый. Абазначаем восі каардынат (*гл.* рыс. 3.5, *б*). Мысленна вызваляем цела D ад сувязі A. Пры адвольным уздзеянні на цела магчымы тры рэактыўныя процідзеянні: X_A, $У_A$, M_A. У нашым прыватным прыкладзе пара сіл M можа толькі паварочваць цела (па ходу стрэлкі гадзінніка) і не здольна выклікаць яго паступальныя перамяшчэнні. Таму і процідзеянне выражаецца толькі рэактыўнай парай M_A, накіраванай супраць руху стрэлкі гадзінніка. А сілы супрацьдзеяння паступальнаму перамяшчэнню цела X_A, $У_A$ адсутнічаюць (і на рысунку не паказаны): $X_A = У_A = 0$.

Для праверкі напрамку рэактыўнай пары M_A складаем ураўненне момантаў адносна адвольнага цэнтра, напрыклад, A: $\sum M_A(\vec{F_i}) = M_A - M = 0$. Адсюль $M_A = M$. Знак «плюс» у моманта M_A — прыкмета правільнасці яго напрамку на рысунку 3.5, *б*.

Прыклад 6. Цела D у форме роўнастаронняга трохвугольніка з кансольным выступам для замацоўкі знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем нагрузкі, размеркаванай па лінейнаму закону ўздоўж стараны трохвугольніка. Максімальнае значэнне нагрузкі роўна q (рыс. 3.6, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, сыходзячы з іх механічнага сэнсу.



а) *б)*

Рысунак 3.6

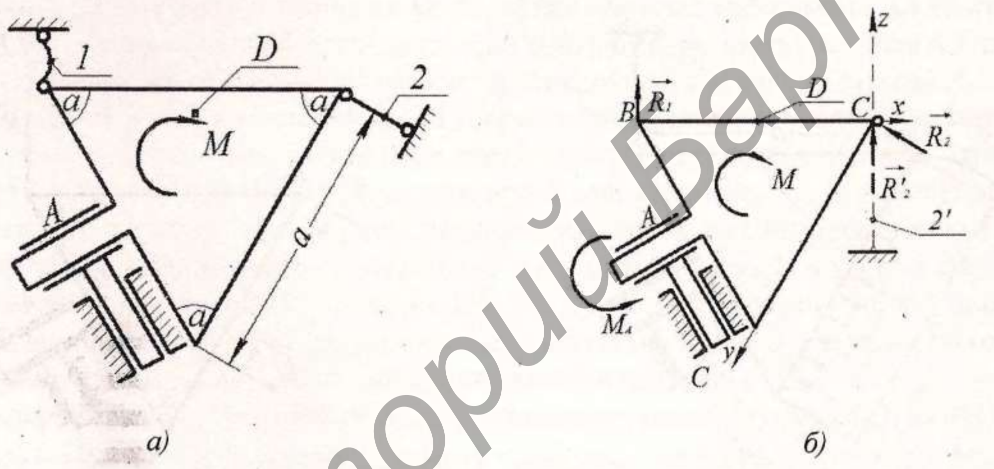
Рашэнне. Абазначаем сувязі лічбамі *1*, *2* і літарай A (*гл.* рыс. 3.6, *а*). Сувязі *1*, *2* уяўляюць сабой бязважкія стрыжні з ідэальнымі шарнірамі на канцах. Сувязь A ўтрымлівае цела D ад павароту і называецца падвойнай слізгальнай замацоўкай. Усе сувязі аднавалентныя. Разам яны ўтвараюць трохвалентную сістэму сувязей.

Знаходзім напрамкі рэакцый. Размеркаваную нагрузку замяняем засяроджанай раўнадзейнай сілай Q; яе велічыня роўная плошчы трохвугольніка са сторанамі a і q: $Q = aq / 2$. Лінія дзеяння сілы Q праходзіць праз цэнтр цяжару апісанага трохвугольніка. Лініі дзеяння рэакцый сувязей *1*, *2* праходзяць праз іх шарніры, а напрамак залежыць ад характару ўздзеяння на цела D — ад сілы Q. Сувязь A ўтрымлівае цела D ад павароту. Таму сіла Q пры адсутнасці сувязей *1*, *2* здольна рухаць яго ў напрамку вектара $\vec{Q}$. Але сувязь *1* перашкаджае такому руху. І паколькі яе рэакцыя R_1 паралельна да вектара $\vec{Q}$, то яна адна (без сувязі *2*) забяспечвае раўнавагу цела. Напрамак вектара R_1 процілеглы сіле Q (*гл.* рыс. 3.6, *б*). Сувязь *2* пры гэтым не нагружана, таму $R_2 = 0$. Падкрэсліваем: у гэтай задачы рэакцыя R_1 адна ўраўнаважвае сілу Q толькі таму, што яе лінія дзеяння паралельна да вектара $\vec{Q}$, а сувязь A выключае паварот цела. Для вызначэння напрамку рэактыўнай пары M_A уяўна замяняем сувязі *1*, *2* двухвалентнай сувяззю E (нерухомым шарнірам), усталяванай на перасячэнні іх ліній узаемадзеяння з целам D (*гл.* рыс. 3.6, *б*). Цяпер пры адсутнасці сувязей *1*, *2* цела атрымлівае магчымасць паварочвацца пад дзеяннем сілы Q вакол пункта E супраць ходу стрэлкі гадзінніка. Утрымаць яго ад павароту можа толькі пара супрацьдзеяння M_A, накіраваная ў напрамку руху стрэлкі гадзінніка.

Заўвага. Каб інакш пераканацца, што $R_2 = 0$, можна выкарыстаць уласцівасць 6. Звернем увагу, што на аб'ект D дзейнічае пяць сіл (пару M_A прадстаўляем у выглядзе дзвюх сіл, паралельных да сілы Q). Чатыры з іх паралельныя паміж сабою. Тады пятая сіла R_2, паводле ўласцівасці 6, павінна быць паралельная да астатніх сіл або роўная нулю. Але паралельнай яна не можа быць, бо адпаведная сувязь *2* не паралельная да іх. Значыць, $R_2 = 0$.

Правяраем вынікі. Складаем умовы раўнавагі: $\sum X_i = 0 + 0 + 0 - R_2 \cos\frac{\alpha}{2} = 0$; $\sum Y_i = Q - R_1 + 0 + R_2 \cos\alpha = 0$; $\sum M_E(\overrightarrow{F_i}) = Q \cdot \frac{2a}{3} - M_A = 0$. Адгэтуль знаходзім: $R_2 = 0$; $R_1 = Q$; $M_A = 2aQ / 3$. Паколькі рэакцыі R_1, M_A атрыманы са знакам «плюс», то іх напрамкі на рысунку 3.6, *б*, сапраўдныя.

Прыклад 7. Несвабоднае цела D трохвугольнай формы з кансольным выступам для замацоўкі знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары сіл з момантам M (рыс. 3.7, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Рысунак 3.7

Рашэнне. Абазначым сувязі лічбамі *1*, *2* і літарай *A*. Валентнасць кожнай з іх роўная адзінцы, а ўсёй сістэмы — тром. Сувязі *1*, *2* выключаюць паступальныя перамяшчэнні цела D у напрамку, вызначаным іх лініямі ўзаемадзеяння з целам, а сувязь A — яго паварот.

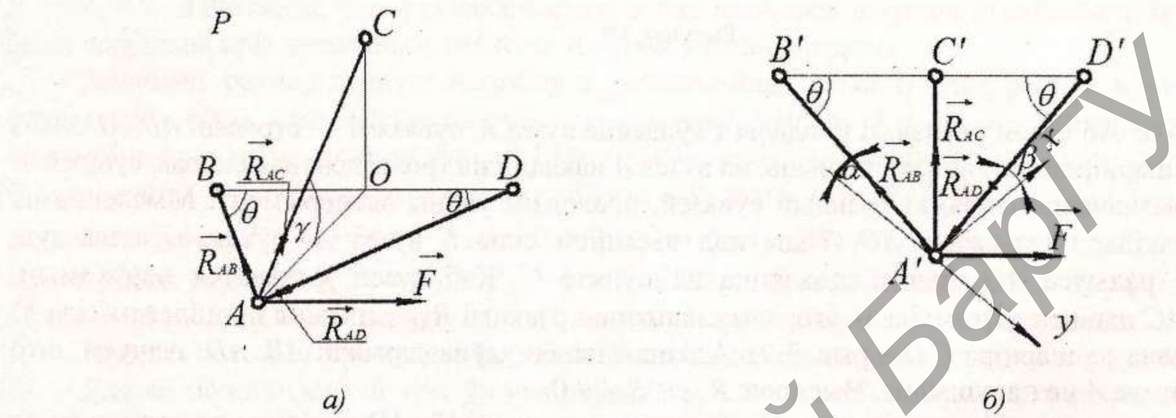
Лініі дзеяння рэакцый сувязей *1*, *2*, як вядома, праходзяць праз шарніры на іх канцах (яны супадаюць з лініямі ўзаемадзеяння). Каб знайсці напрамкі рэакцый, а затым і іх велічыні, неабходна правесці ўяўны эксперымент з механічнай сістэмай, звяртаючы ўвагу на напрамкі дзеяння і процідзеяння. Дзеянне на сістэму аказвае пара сіл; яна імкнецца павярнуць цела ў напрамку руху стрэлкі гадзінніка. Рэакцыі сувязей аказваюць процідзеянне пары сіл; пры гэтым сувязі *1*, *2*, як адзначалася, здольны ўтрымліваць цела D ад паступальнага перамяшчэння, а сувязь A — ад павароту. Але паколькі пара M не выклікае паступальнага перамяшчэння, то і адпаведнае процідзеянне адсутнічае: $R_1 = R_2 = 0$. Такім чынам, процідзеянне пары M аказвае толькі рэактыўная пара M_A. Яна накіравана супраць руху стрэлкі гадзінніка (*гл.* рыс. 3.7, *б*).

Правяраем вынікі. Праводзім восі Bx, Cy. Напрамкі рэакцый R_1, R_2 на рысунку паказаны адвольна. Запісваем умовы раўнавагі: $\sum X_i = 0 + 0 + 0 - R_2 \cos\frac{\alpha}{2} = 0$; $\sum Y_i = 0 + 0 + 0 - R_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 0$; $\sum M_B(\overrightarrow{F_i}) = M_A - M = 0$. Адсюль вызначаем: $R_1 = R_2 = 0$; $M_A = M$. Як бачым, атрыманы момант M_A дадатны. Гэта азначае, што яго напрамак на рысунку 3.7, *б*, сапраўдны.

Заўвага. Разгледжаны прыклад мае цікавы прыватны варыянт. Уявім, што стрыжань *2* паралельны да лініі ўзаемадзеяння стрыжня *1*, як паказана на рысунку 3.7, *б*, пункцірам. У гэтым выпадку R_1, R_2 ужо не роўныя нулю. Калі складзём умову раўнавагі $\sum Z_i = 0 + 0 + R_1 +$

$+R_2 = 0$, то атрымаем: $R_1 = -R_2'$. Як бачым, цяпер рэакцыі стрыжняў утвараюць рэактыўную пару процідзеяння, накіраваную супраць руху стрэлкі гадзінніка. Абазначым яе літарай M_R. Запішам умову раўнавагі цела D: $\sum M_B(\vec{F_i}) = M_A + M_R - M = 0$. Тут дзве невядомыя: M_A і M_R. Іх нельга вызначыць з аднаго ўраўнення. Такія задачы называюцца *статычна невызначальнымі*. Метады іх рашэння разглядаюцца ў курсе механікі матэрыялаў.

Прыклад 8. Прасторавая механічная сістэма ўтворана з трох бязважкіх стрыжняў, шарнірна злучаных у вузле A і замацаваных з дапамогай шарніраў да нерухомай вертыкальнай плоскасці P. Стрыжні AB і AD знаходзяцца ў гарызантальнай плоскасці. На вузел A дзейнічае гарызантальная сіла F, лінія дзеяння якой паралельная да плоскасці P (рыс. 3.8, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Рысунак 3.8

Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі ў задачы з'яўляецца вузел A. Накладзенымі на яго сувязямі служаць стрыжні з шарнірамі на канцах. Усе сувязі аднавалентныя. Разам яны ўтвараюць трохвалентную сістэму сувязей.

Вызначаем напрамкі рэакцый стрыжняў як сіл процідзеяння сіле F. Адкідаем уяўна стрыжань AC. Відавочна, што раўнавага вузла A не парушыцца. Гэта азначае, што стрыжань AC не нагружаны і рэакцыя R_{AC} роўная нулю. У далейшым аналізе яго не ўлічваем: разглядаем механічную сістэму з двух стрыжняў AB, AD. Уяўна адкідаем стрыжань AB. Тады раўнавага вузла A парушыцца: ён пад дзеяннем сілы F пачне аддаляцца ад пункта B. Стрыжань AB павінен процідзейнічаць сіле — утрымліваць вузел у раўнавазе. Таму яго рэакцыя R_{AB} накіравана ад вузла A ў бок шарніра B (гл. рыс. 3.8, *а*). Аналагічна, мысленна адкідаючы стрыжань AD, заўважым, што ў час уяўнага перамяшчэння вузла A адлегласць AD будзе памяншацца. Каб утрымаць вузел у раўнавазе, рэакцыю R_{AD} неабходна накіроўваць да вузла. Значыць, у зададзенай механічнай сістэме стрыжань AB расцягнуты, AD — сціснуты.

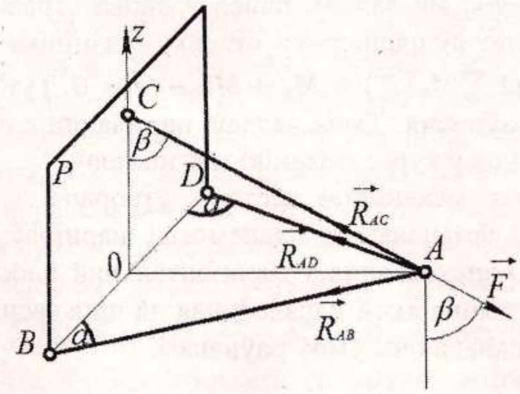
Правяраем вынік з дапамогай ураўненняў раўнавагі. Уводзім сістэму восей каардынат $A'xy$. Восі $A'x$, $A'y$ змяшчаем у гарызантальнай плоскасці перпендыкулярна да рэакцый R_{AB}, R_{AD} адпаведна, як паказана на рысунку 3.8, *б* (від зверху). Выбар восей $A'x$, $A'y$ абумоўлены патрабаваннем да ўмоў раўнавагі: кожная з іх павінна змяшчаць толькі адну невядомую рэакцыю. На вузел A дзейнічае сыходная сістэма сіл. Запісваем умовы раўнавагі:

$\sum X_i = -R_{AD}\cos\beta + F\cos(\theta - \beta) = 0$; $\sum Y_i = -R_{AB}\cos\alpha + F\cos(90^\circ - \theta) = 0$.

З іх атрымліваем: $R_{AD} = F\cos(\theta - \beta)/\cos\beta$; $R_{AB} = F\cos(90^\circ - \theta)/\cos\alpha$; $R_{AC} = 0$.

Высновa: паколькі знакі рэакцый R_{AD}, R_{AB} дадатныя, то іх напрамкі на рысунку сапраўдныя.

Прыклад 9. Прасторавая механічная сістэма ўтворана з трох бязважкіх стрыжняў, рухома злучаных шарнірам A і шарнірна замацаваных да вертыкальнай плоскасці P. Стрыжні AB, AD змешчаны ў гарызантальнай плоскасці. Да вузла A прыкладзена сіла F, лінія дзеяння якой сумешчана з працягам восі стрыжня AC (рыс. 3.9). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.



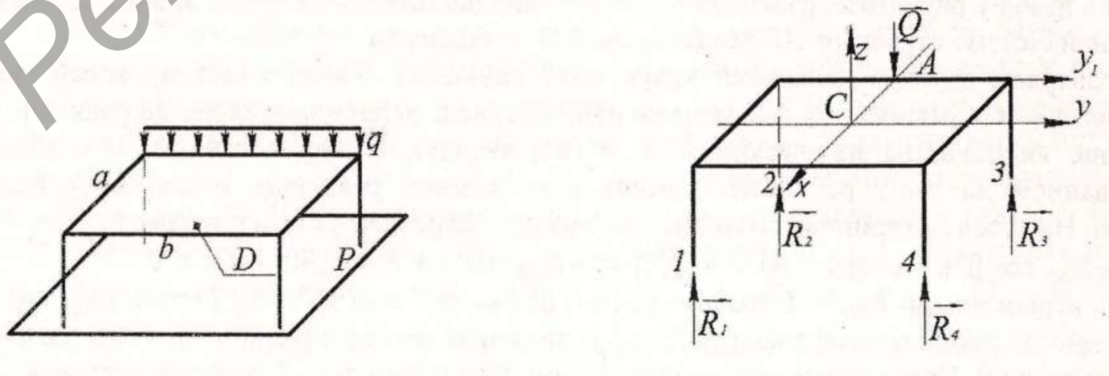
Рысунак 3.9

Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі ў задачы з'яўляецца вузел *A*, сувязямі — стрыжні *AB*, *AD*, *AC* з ідэальнымі шарнірамі на канцах. Значыць, на вузел *A* накладзена трохвалентная сістэма сувязей.

Каб вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, праводзім уяўны эксперымент. Мысленна на імгненне адкідаем стрыжань *AC*. Тады пад дзеяннем сілы *F* вузел *A*, рухаючыся па дузе акружнасці радыуса *AO*, пачне аддаляцца ад пункта *C*. Каб вузел заставаўся нерухомым, стрыжань *AC* павінен утрымліваць яго, таму напрамак рэакцыі R_{AC} стрыжня процілеглы сіле *F*: яна накіравана да шарніра *C* (*гл.* рыс. 3.9). Адкінем цяпер уяўна стрыжні *AB*, *AD*. Адчуем, што раўнавага вузла *A* не парушыцца. Высновa: $R_{AD} = R_{AB} = 0$.

Праверым вынік. Праводзім вось *Oz*. Рэакцыі стрыжняў *AB*, *AD* накіруем па стрыжнях ад вузла *A* ў бок плоскасці *P*. Складаем ураўненне раўнавагі: $\sum Z_i = R_{AC}\cos\beta - F\cos\beta + 0 + 0 = 0$. Адгэтуль $R_{AC} = F$. Рэакцыя R_{AC} атрымалася дадатная, таму яе накірунак на рысунку 3.9 сапраўдны. Для праверкі рэакцыі стрыжня *AB* накіруем вектар R_{AB} па стрыжню *AB*. Далей праводзім вось *Ax*, перпендыкулярную да плоскасці, утворанай стрыжнямі *AD*, *AC* (на рысунку не паказана), і складаем ураўненне праекцый: $\sum X_i = R_{AB}\cos\gamma + 0 + 0 = 0$, дзе γ — вугал, утвораны вектарам R_{AB} з воссю *Ax*. Адсюль $R_{AB} = 0$. Аналагічна, пабудаваўшы вось *Ay*, перпендыкулярную да плоскасці трохвугольніка *ABC*, і склаўшы ўмову раўнавагі $\sum Y_i = 0$, установім, што $R_{AD} = 0$.

Прыклад 10. Мантажны столік *D* устаноўлены на гладкай гарызантальнай падлозе і нагружаны па яго краю раўнамерна размеркаванай вертыкальнай нагрузкай інтэнсіўнасці *q* (рыс. 3.10, *а*). Вызначыць сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі. Сілай цяжару століка ігнараваць.



а) *б)*

Рысунак 3.10

Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі ў гэтай задачы з'яўляецца столік. Сувязямі для яго служаць участкі падлогі, у якіх на яе абапіраецца стол. Такім чынам, на аб'ект раўнавагі накладзены чатыры аднолькавыя сувязі — ідэальна гладкія паверхні. Абазначым іх лічбамі *1*, *2*, *3*, *4*.

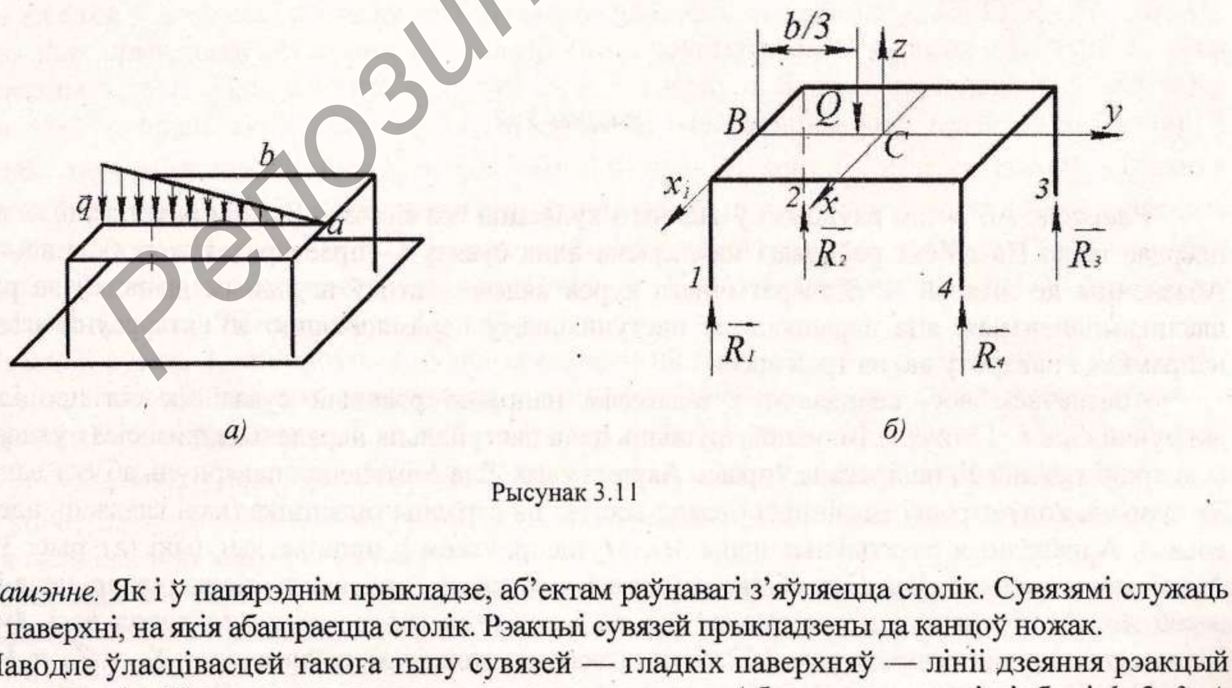
Рэакцыі прыкладзены да канцоў ножак; іх лініі дзеяння перпендыкулярныя да паверхні падлогі (*гл.* рыс. 3.10, *б*). Паколькі дзеянне (нагрузка *q)* накіравана ўніз, то процідзеянне (рэакцыі R_1, R_2, R_3, R_4) накіравана ўверх. Асаблівасць сувязей у гэтай задачы заключаецца ў тым, што іх рэакцыі заўжды накіраваны ў адзін бок — да аб'екта раўнавагі. Па гэтай прычыне іх называюць *аднабаковымі.* Аналізуючы рысунак 3.10, *б*, і ўлічваючы заўвагу аб ігнараванні сілай цяжару, можна ўдакладніць вынік. Сапраўды, праводзячы ўяўны эксперымент, лёгка заўважыць, што для ўраўнаважвання дзеяння нагрузкі q дастаткова дзвюх рэактыўных сіл процідзеяння R_2, R_3, што знаходзяцца з ёю ў адной вертыкальнай плоскасці. Дзеянне на ножкі *1*, *4* адсутнічае, таму $R_1 = R_4 = 0$. Заўважым, што раўнавага століка пад дзеяннем нагрузкі q няўстойлівая. Яна можа быць парушана пры нязначным змяненні напрамку гэтай нагрузкі.

Замяняем размеркаваную нагрузку q раўнадзейнай сілай Q. Яна роўная плошчы эпюры (прамавугольніка), што ўяўляе нагрузку на рысунку 3.10, *а*: $Q = qb$. Яе лінія дзеяння заўжды праходзіць праз цэнтр цяжару эпюры. Выконваючы праверку вынікаў, будзем улічваць, што сіла Q знаходзіцца ў плоскасці сіметрыі Cxz аб'екта раўнавагі. Таму $R_1 = R_4$, $R_2 = R_3$. Складаем умову раўнавагі: $\sum M_{y_1}(\vec{F_i}) = -R_1 a - R_4 a + 0 + 0 + 0 = 0$ ці $-2R_1 = 0$. Адсюль $R_1 = R_2 = 0$. Паводле другой умовы раўнавагі $\sum Z_i = R_2 + R_3 - Q = 0$ ці $2R_2 - Q = 0$. Знаходзім: $R_2 = R_3 = Q / 2$. Паколькі атрыманыя рэакцыі R_2, R_3 дадатныя, то іх напрамкі на рысунку 3.10, *б*, сапраўдныя.

Заўвага. У гэтым прыкладзе на аб'ект D дзейнічае прасторавая сістэма паралельных сіл.

Для яе можна скласці тры ўмовы раўнавагі. А невядомых рэакцый сувязей, як відаць на рысунку 3.10, *б*, чатыры. Таму ў агульным выпадку ў тэарэтычнай механіцы задача не мае рашэння. Такія задачы называюць *статычна невызначальнымі.* Іх рашэнне ў тэарэтычнай механіцы магчыма толькі ў прыватных выпадках — пры наяўнасці плоскасцей сіметрыі.

Прыклад 11. Мантажны столік даўжынёю b знаходзіцца на гладкай гарызантальнай паверхні. У плоскасці сіметрыі да яго прыкладзена размеркаваная па лінейнаму закону нагрузка, максімальная інтэнсіўнасць якой роўная q (рыс. 3.11, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.



а) *б)*

Рысунак 3.11

Рашэнне. Як і ў папярэднім прыкладзе, аб'ектам раўнавагі з'яўляецца столік. Сувязямі служаць участкі паверхні, на якія абапіраецца столік. Рэакцыі сувязей прыкладзены да канцоў ножак.

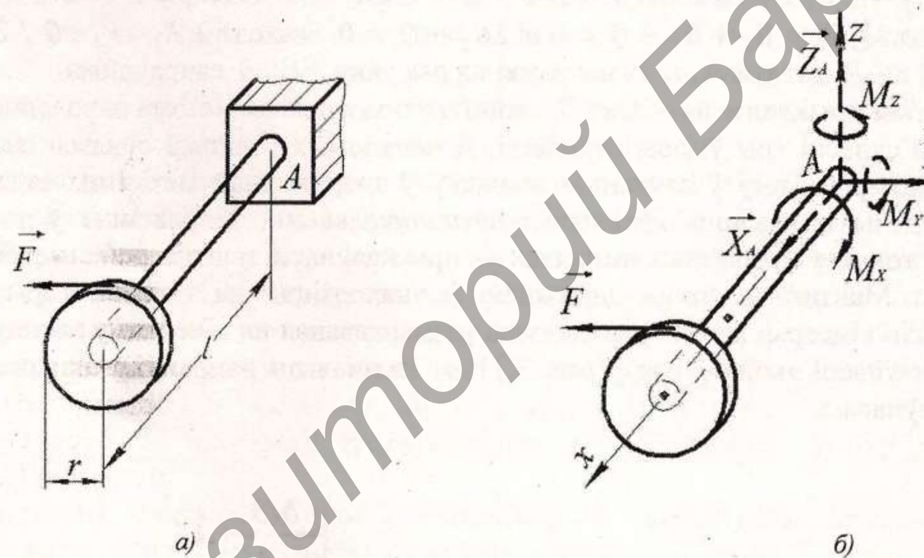
Паводле ўласцівасцей такога тыпу сувязей — гладкіх паверхняў — лініі дзеяння рэакцый нармальныя да іх. У нашым прыкладзе яны вертыкальныя. Абазначаем ножкі лічбамі *1*, *2*, *3*, *4*, а адпаведныя ім рэакцыі — літарамі R_1, R_2, R_3, R_4. Дзеянне на столік аказвае размеркаваная нагрузка, накіраваная ўніз. Таму процідзеянне — рэакцыі R_1, R_2, R_3, R_4 — накіравана ўверх (*гл.* рыс. 3.11, *б*).

Для праверкі вынікаў складаем умовы раўнавагі. Для гэтага размеркаваную нагрузку замяняем раўнадзейнай Q, якая роўная плошчы трохвугольніка: $Q = qb\,/\,2$. Лінія дзеяння раўнадзейнай праходзіць праз цэнтр цяжару трохвугольніка. Уводзім сістэму восей каардынат $Cxyz$. Улічваем, што разглядаемая механічная сістэма мае плоскасць сіметрыі Cyz, у якой дзейнічае сіла Q. Таму на рысунку 3.11, *б*, $R_1 = R_2$, $R_3 = R_4$, значыць, у задачы дзве невядомыя. Запісваем суму момантаў адносна восі Bx_1 і суму праекцый на вось Cz:
$\sum M_{x_1}(\overrightarrow{F_i}) = 0 + 0 - \frac{Qb}{3} + (R_3 + R_4)b = 0$; $\sum Z_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - Q = 0$.

З атрыманых роўнасцей вызначаем: $R_3 = R_4 = Q\,/\,6$; $R_1 = R_2 = Q\,/\,3$.

Як бачым, усе рэакцыі дадатныя. Гэта азначае, што іх напрамкі на рысунку 3.11, *б*, паказаны правільна.

Прыклад 12. Механічная сістэма ўяўляе сабой кансольны стрыжань і жорстка змацаваны з ім круглы дыск. Да сістэмы ў плоскасці дыска прыкладзена гарызантальная сіла F (рыс. 3.12, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязі, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Рысунак 3.12

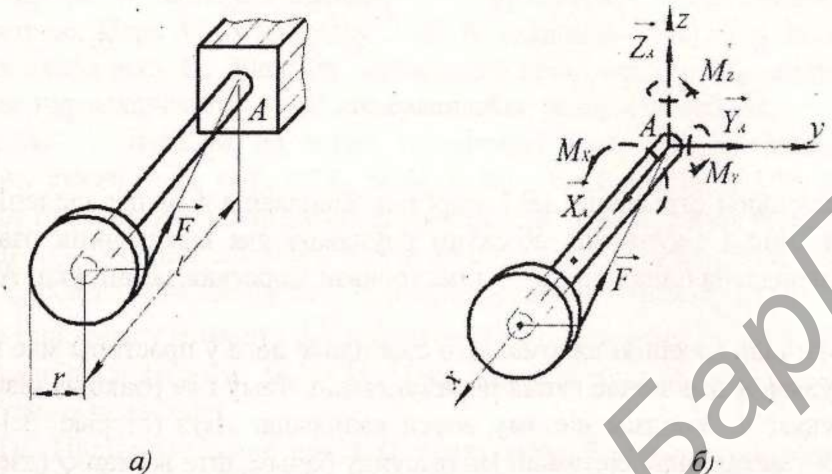
Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі ў задачы з'яўляецца ўся сістэма. Будзем разглядаць яе як адно цвёрдае цела. На аб'ект раўнавагі накладзена адна сувязь — прасторавая жорсткая замацоўка. Абазначым яе літарай A. З тэарэтычнага курса вядома, што ў агульным выпадку яе рэакцыя шасцікампанентная: яна перашкаджае паступальнаму перамяшчэнню аб'екта раўнавагі ў трох напрамках і павароту вакол трох восей.

Абазначаем восі каардынат і знаходзім напрамкі рэакцый сувязі як сіл процідзеяння актыўнай сіле F. Гэта сіла імкнецца зрушыць цела паступальна паралельна да восі Ay ўлева. Таму сіла процідзеяння Y_A накіравана ўправа. Акрамя таго, сіла F імкнецца павярнуць аб'ект вакол восі Ax супраць ходу стрэлкі гадзінніка і вакол восі Az па стрэлцы гадзінніка (калі глядзець насустрач восям). Адпаведныя рэактыўныя пары M_X, M_Z накіроўваем у процілеглыя бакі (*гл.* рыс. 3.12, *б*). Аналізуючы дзеянне сілы F на аб'ект раўнавагі, заўважаем, што яна не можа рухаць цела ўздоўж восей Ax, Az (бо перпендыкулярна да іх), як і не можа паварочваць яго вакол восі Ay. Таму і адпаведныя процідзеянні (на рыс. 3.12, *б*, яны паказаны пункцірам) роўныя нулю: $X_A = Z_A = M_Y = 0$.

На аб'ект раўнавагі дзейнічае адвольная прасторавая сістэма сіл. Складаем для яе шэсць умоў раўнавагі (моманты, роўныя нулю, не запісваем): $\sum X_i = X_A = 0$; $\sum Y_i = Y_A - F = 0$;

$\sum Z_i = Z_A = 0$; $\sum M_X(\overrightarrow{F_i}) = Fr - M_X = 0$; $\sum M_Y(\overrightarrow{F_i}) = M_Y = 0$; $\sum M_Z(\overrightarrow{F_i}) = M_Z - Fl = 0$. Рашаем атрыманыя ўраўненні, знаходзім: $X_A = Z_A = M_Y = 0$; $Y_A = F$; $M_X = Fr$; $M_Z = Fl$. Знойдзеныя рэакцыі дадатныя. Гэта сведчыць аб тым, што іх напрамкі на рысунку 3.12, *б*, правільныя.

Прыклад 13. Механічная сістэма складаецца з кансольнага стрыжня і круглага дыска, жорстка змацаваных паміж сабою. На дыск дзейнічае гарызантальная сіла *F*, лінія дзеяння якой праходзіць праз цэнтр замацоўкі стрыжня (рыс. 3.13, *а*). Знайсці напрамкі рэакцый сувязі, не складаючы ўмоў раўнавагі.



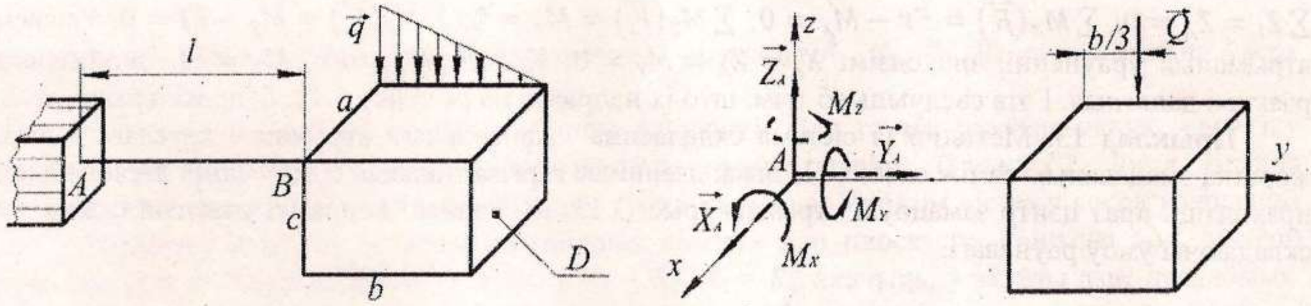
Рысунак 3.13

Рашэнне. Стрыжань і дыск, паводле ўмовы задачы, уяўляюць адно цвёрдае цела, якое і з'яўляецца аб'ектам раўнавагі. На яго накладзена адна шасцівалентная сувязь — жорсткая прасторавая замацоўка. Абазначаем яе літарай *А*. З тэарэтычнага курса вядома, што такая замацоўка выключае як паступальныя перамяшчэнні ў трох узаемна перпендыкулярных напрамках, так і павароты вакол трох восей.

Абазначаем восі каардынат літарамі *Ax*, *Ay*, *Az*. Вызваляемся ад сувязі *А*. Сіла супрацьдзеяння ў агульным выпадку раскладваецца на шэсць кампанетнаў: X_A, Y_A, Z_A, M_X, M_Y, M_Z. У прыватных прыкладах некаторыя з іх могуць быць роўныя нулю. Разглядаем рэакцыі як сілы процідзеяння сіле *F*. Пры адсутнасці сувязі сіла *F* пасунула б цела паступальна ў напрамку вектара *F* — супраць восей *Ax* і *Ay* (у гэтым лёгка пераканацца, калі прадставіць вектар *F* у выглядзе двух кампанентаў: $\vec{F} = \overrightarrow{F_x} + \overrightarrow{F_y}$). Таму сілы процідзеяння X_A, Y_A накіраваны ў напрамку гэтых восей (*гл.* рыс. 3.13, *б*). У напрамку восі *Az* уздзеянне на аб'ект адсутнічае, таму адпаведнае процідзеянне $Z_A = 0$. На рысунку 3.13, *б*, відаць, што лінія дзеяння сілы *F* перасякае ў пункце *А* ўсе восі каардынат, таму не можа паварочваць цела вакол іх. Па гэтай прычыне адсутнічае і рэактыўнае процідзеянне павароту, значыць, $M_X = M_Y = M_Z = 0$.

Рэакцыі сувязі *А*, якія роўныя нулю, паказваем на рысунку 3.13, *б*, пункцірам. На аб'ект раўнавагі дзейнічае адвольная прасторавая сістэма сіл. Запісваем для яго тыя ж умовы раўнавагі, што і ў папярэднім прыкладзе: $\sum X_i = X_A - F\cos\alpha = 0$; $\sum Y_i = Y_A - F\sin\alpha = 0$; $\sum Z_i = Z_A = 0$; $\sum M_X(\overrightarrow{F_i}) = M_X = 0$; $\sum M_Y(\overrightarrow{F_i}) = M_Y = 0$; $\sum M_Z(\overrightarrow{F_i}) = M_Z = 0$. Адсюль знаходзім: $X_A = F\cos\alpha$; $Y_A = F\sin\alpha$; $Z_A = M_X = M_Y = M_Z = 0$. Тут, як бачым, X_A, Y_A дадатныя, што сведчыць аб правільнасці іх напрамкаў на рысунку 3.13, *б*.

Прыклад 14. Прамавугольны паралелепіпед *D*, размеры якога роўныя *a*, *b*, *c*, жорстка прымацаваны да кансольнага стрыжня даўжынёю *l*. Да рабра паралелепіпеда прыкладзена нагрузка, размеркаваная па лінейнаму закону (рыс. 3.14, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязі, не складаючы ўмоў раўнавагі.



а) *б)*

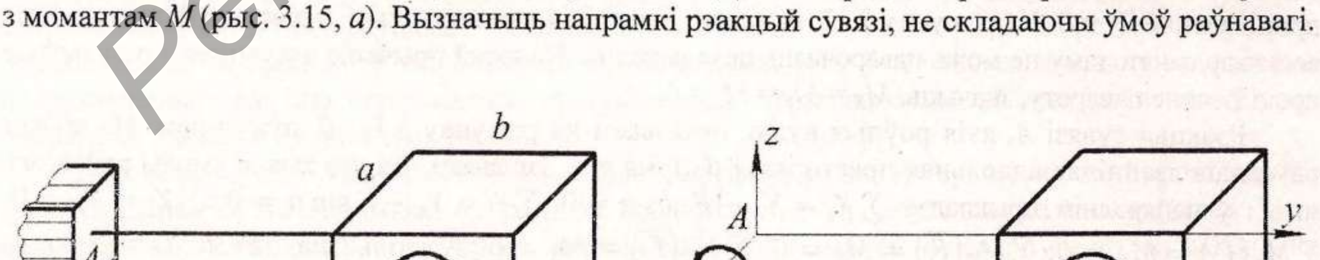
Рысунак 3.14

Рашэнне. Кансольны стрыжань *AB* і жорстка змацаваны з ім паралелепіпед *D* уяўляюць адно цвёрдае цела. Яно і з'яўляецца аб'ектам раўнавагі для вызначэння рэакцый сувязі. На аб'ект раўнавагі накладзена адна сувязь — прасторавая жорсткая замацоўка. Абазначым яе той жа літарай *A*.

З курса тэарэтычнай механікі вядома, што свабоднае цела ў прасторы мае шэсць магчымых перамяшчэнняў. Сувязь *A* выключае гэтыя перамяшчэнні. Таму і яе рэакцыя шасцікампанентная. Вызваляемся ад сувязі *A*. Уводзім сістэму восей каардынат *Axyz* (*гл.* рыс. 3.14, *б*). Праводзім уяўны эксперымент з механічнай сістэмай. На рысунку бачым, што вектар Q (дзеянне), які ўяўляе раўнадзейнуюзададзенай нагрузкі, накіраваны ўніз. Таму адпаведнае процідзеянне Z_A накіроўваем уверх. Дзеянне ў напрамку восей *Ax*, *Ay* адсутнічае, таму $X_A = Y_A = 0$. Зноў звяртаемся да рысунка 3.14, *б*. На ім сіла Q, паралельная да восі *Az*, значыць, яна не можа паварочваць цела вакол гэтай восі. Таму адпаведнае процідзеянне не ўзнікае: $M_Z = 0$. Разам з тым сіла Q імкнецца павярнуць аб'ект па стрэлцы гадзінніка вакол восей *Ax*, *Ay*. Значыць, адпаведныя процідзеянні накіраваны супраць руху стрэлкі гадзінніка. Нулявыя складаемыя рэакцыі сувязі *A* на рысунку 3.14, *б*, паказваем пункцірнымі лініямі, напрамак для іх выбіраем дадатны.

Для праверкі атрыманага выніку складаем умовы раўнавагі. Улічваем, што на аб'ект раўнавагі дзейнічае адвольная прасторавая сістэма сіл. Складаемыя, роўныя нулю, не запісваем: $\sum X_i = X_A = 0$; $\sum Y_i = Y_A = 0$; $\sum Z_i = Z_A - Q = 0$; $\sum M_X(\overrightarrow{F_i}) = M_X - Q(l + b\,/\,3) = 0$; $\sum M_Y(\overrightarrow{F_i}) = M_Y - Qa = 0$; $\sum M_Z(\overrightarrow{F_i}) = M_Z = 0$. Рашаем ураўненні, знаходзім: $Z_A = Q$; $M_X = Q(l + b\,/\,3)$; $M_Y = Qa$; $X_A = Y_A = M_Z = 0$. Аналізуючы вынік, прыходзім да высновы: паколькі атрыманыя велічыні Z_A, M_X, M_Y дадатныя, то ўстаноўленыя напрамкі адпаведных рэакцый правільныя.

Прыклад 15. Прамавугольны паралелепіпед *D*, размеры якога роўныя *a*, *b*, *c*, жорстка прымацаваны да кансольнага стрыжня даўжынёю *l*. Да яго пярэдняй грані прыкладзена пара сіл з момантам *M* (рыс. 3.15, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязі, не складаючы ўмоў раўнавагі.



а) *б)*

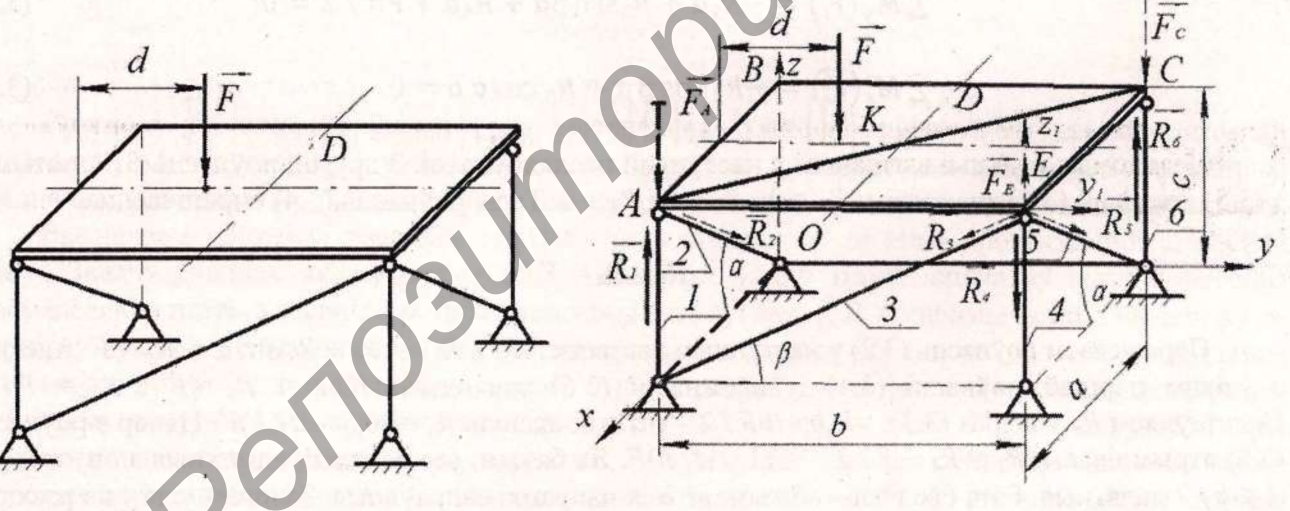
Рысунак 3.15

Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі для вызначэння рэакцый сувязі з'яўляецца ўся жорсткая сістэма — сукупнасць стрыжня і паралелепіпеда. На аб'ект раўнавагі накладзена адна сувязь — жорсткая прасторавая замацоўка. Абазначым яе літарай A. Сувязь A, як вядома, выключае ўсе шэсць магчымых перамяшчэнняў цела ў прасторы.

Уводзім сістэму каардынат $Axyz$. Вызваляемся ад сувязі A. Пры адвольным нагружэнні аб'екта раўнавагі рэакцыя сувязі прадстаўляецца рэактыўнай сілай R_A і рэактыўнай парай M_A. Кожная з іх раскладваецца на тры кампаненты па восях каардынат. Установім сапраўдныя напрамкі рэактыўных сіл і момантаў. Для гэтага праводзім уяўны эксперымент: нагружаем аб'ект раўнавагі парай сіл M — аказваем дзеянне — і прагназуем процідзеянне з боку сувязі — знаходзім яе рэакцыю. Пара M на рысунку 3.15, *б*, імкнецца павярнуць цела ў напрамку руху стрэлкі гадзінніка вакол восі Ax. Значыць, адпаведнае процідзеянне M_X накіравана ў процілеглы бок. Ніякіх іншых перамяшчэнняў — ні паступальных уздоўж восей Ax, Ay, Az, ні вярчальных вакол восей Ay, Az — пара M не можа выклікаць. Таму адсутнічаюць і адпаведныя ім процідзеянні з боку сувязі A: $X_A = Y_A = Z_A = M_Y = M_Z = 0$. На рысунку 3.15, *б*, яны не паказаны. Як бачым, у гэтым прыкладзе пацвярджаецца ўласцівасць 9: зададзеная пара M ураўнаважваецца рэактыўнай парай M_X. Узяўшы да ўвагі гэтую ўласцівасць, можна лёгка рашыць аналагічную задачу ў выпадках, калі пара M дзейнічае ў іншых плоскасцях паралелепіпеда.

Для праверкі напрамку моманту M_X дастаткова запісаць адну ўмову раўнавагі: $\sum M_X(\overline{F_i}) = M_X - M = 0$. Адсюль знаходзім: $M_X = M$. Паколькі велічыня M_X атрымалася дадатнай, то яе напрамак устаноўлены правільна.

Прыклад 16. Прамавугольная пліта D замацавана ў гарызантальным становішчы пры дапамозе шасці бязважкіх стрыжняў. Да пліты прыкладзена вертыкальная сіла F (рыс. 3.16, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі. Сілай цяжару пліты ігнараваць. Лічыць $d < b / 2$.



Рысунак 3.16

Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі ў гэтым прыкладзе з'яўляецца пліта D, аднавалентнымі сувязямі — стрыжні з ідэальнымі шарнірамі на канцах. Абазначым іх лічбамі *1—6* (*гл.* рыс. 3.16, *б*).

Установім напрамкі рэакцый сувязей. Ціск сілы F на пліту перадаецца праз яе на стрыжні. Аналіз узаемадзеяння пліты са стрыжнямі правядзём у два этапы: спачатку ўстановім напрамкі сіл узаемадзеяння пліты са стрыжнямі ў вузлах (шарнірах) A, C, E, а потым вызначым напрамкі рэакцый у стрыжнях. Перад вызначэннем напрамкаў карысна звярнуцца да прыклада 9. Заўважаем, што вугал B пліты не замацаваны. Калі адкінуць стрыжні *3*, *4*, *5*, то пліта будзе ўяўляць своеасаблівы рычаг з апорай на дыяганалі AC (*гл.* рыс. 3.16, *б*). Пад дзеяннем сілы F яна павернецца вакол дыяганалі, пры гэтым вугал E падымецца. Значыць, дзеянне F_E пліты на шарнір, прымацаваны да вугла E, накіравана ўверх (на рысунку 3.16, *б*, вектар паказаны пункцірнай стрэлкай). Пад дзеяннем такой нагрузкі, як вядома з прыклада 9, стрыжань *4* расцягваецца, значыць, яго рэакцыя R_4 накіравана ад пліты ўніз, а стрыжні *3* і *5* не нагружаны: $R_3 = R_5 = 0$.

Каб вызначыць напрамкі рэакцый R_1, R_6, зноў уявім пліту D як рычаг, але ўжо з апорай на шарніры E. Калі ўявіць, што стрыжні *1*, *2*, *6* могуць дэфармавацца, то пад дзеяннем сілы F дыяганаль AC і шарніры A, C будуць апускацца, а стрыжні сціскацца. Значыць, рэакцыі стрыжняў *1* і *6* — сілы супрацьдзеяння — накіраваны ўверх, да пліты, а стрыжань *2* у работу не ўключаецца ($R_2 = 0$), бо калі яго адкінуць, раўнавага дыяганалі не парушыцца (лічым, што стрыжні *1*, *2* не дэфармуюцца).

Заўвага. Калі сілу F перанесці ў любы пункт на дыяганалі AC, то лёгка пераканацца, што пліта будзе заставацца ў раўнавазе толькі на стрыжнях *1* і *6*. Рэакцыі астатніх стрыжняў будуць роўны нулю.

Праверым напрамкі рэакцый з дапамогай умоў раўнавагі. Вызваляем пласціну D ад сувязей, уяўна адкідаючы іх. Рэакцыі, роўныя нулю, паказваем на рысунку 3.16, *б*, пункцірнымі стрэлкамі. Прыменім спачатку тыпавую методыку вызначэння рэакцый. Уводзім сістэму восей каардынат $Oxyz$ з агульным пачаткам O. Складаем умовы раўнавагі:

$$\left(\sum X_i = (-R_2 - R_5)\cos\alpha = 0; \sum Y_i = -R_3\cos\beta = 0\right); \qquad (3.1)$$

$$\sum Z_i = R_1 - R_2\sin\alpha - R_3\sin\beta - R_4 - R_5\sin\alpha + R_6 - F = 0; \qquad (3.2)$$

$$\sum M_x(\overrightarrow{F_i}) = -R_4 b - R_5\sin\alpha\, b + R_6 b - Fd = 0; \qquad (3.3)$$

$$\sum M_y(\overrightarrow{F_i}) = -R_1 a + R_3\sin\beta a + R_4 a + Fa/2 = 0; \qquad (3.4)$$

$$\sum M_z(\overrightarrow{F_i}) = -R_3\cos\beta\, a + R_5\cos\alpha\, b = 0. \qquad (3.5)$$

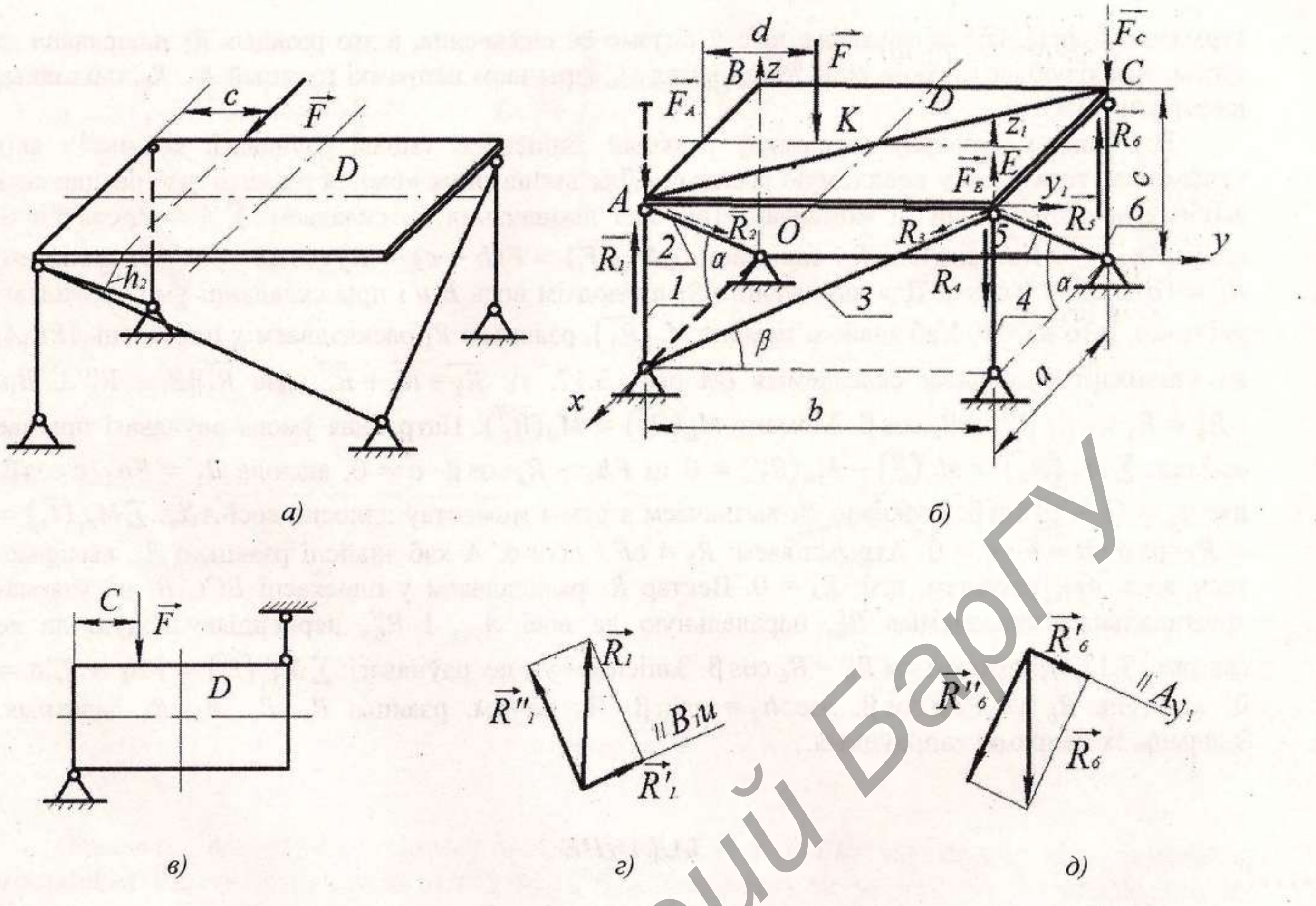
Невядомыя рэакцыі вызначым у наступнай паслядоўнасці. З другой роўнасці (3.1), затым з (3.5) і першай (3.1) знаходзім: $R_3 = 0$; $R_5 = 0$ і $R_2 = 0$. Тады роўнасць (3.4) спрашчаецца:

$$R_1 - R_4 = F/2. \qquad (3.6)$$

Перапісваем роўнасць (3.2) у наступным выглядзе: $(R_1 - R_4) - (R_2 + R_5)\sin\alpha + R_6 = F$. Адсюль з улікам першай роўнасці (3.1) і залежнасці (3.6) знаходзім: $F/2 + R_6 = F$ і $R_6 = F/2$. Падстаўляем R_6 у выраз (3.3): $-R_4 b + bF/2 - Fd = 0$; адсюль $R_4 = (0{,}5 - d/b)F$. Цяпер з роўнасці (3.6) атрымліваем: $R_1 = R_4 + F/2 = = (1 - d/b)F$. Як бачым, усе рэакцыі, адменныя ад нуля, пры $d < b/2$ дадатныя. Гэта сведчыць аб тым, што іх напрамкі сапраўдныя. Звернем увагу на рэакцыі R_4 і R_3. Пры $d = b/2$ сіла F перамяшчаецца на дыяганаль AC, і R_4 паводле адпаведнай формулы прымае значэнне, роўнае нулю. Такім чынам, пацвярджаецца зробленая вышэй заўвага. А стрыжань *3* пры любым вертыкальным уздзеянні на пліту застаецца ненагружаным ($R_3 = 0$).

Вышэй, як адзначалася, выкарыстана тыпавая методыка вызначэння рэакцый сувязей. Пры гэтым атрыманыя ўраўненні раўнавагі ўтвараюць *сістэму*, бо, як правіла, кожнае з іх утрымлівае некалькі невядомых. Паводле іншай методыкі выбіраюць адмысловыя восі *паасобку* (не сістэму) для вызначэння пэўнай рэакцыі сувязі. Так, напрыклад, для вызначэння рэакцыі R_6 запісваем умову: $\sum M_{y_1}(\overrightarrow{F_i}) = -Fa/2 + R_6 a = 0$, адкуль $R_6 = F/2$. А знайсці R_2 можна з роўнасці $\sum M_{z_1}(\overrightarrow{F_i}) = -R_2\cos\alpha \cdot b = 0$ і г. д. Восі Ay_1, Ez_1 паказаны на рысунку 3.16, *б*.

Прыклад 17. Бязважкая прамавугольная пліта D замацавана ў гарызантальным становішчы пры дапамозе шасці бязважкіх стрыжняў. Да яе прыкладзена гарызантальная сіла F (рыс. 3.17, *а*). Вызначыць напрамкі рэакцый сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Рысунак 3.17

Рашэнне. Аб'ектам раўнавагі для вызначэння рэакцый сувязей з'яўляецца пліта D. Аднавалентнымі сувязямі служаць бязважкія стрыжні з ідэальнымі шарнірамі на канцах. Абазначым іх лічбамі *1—6*. Такім чынам, на пліту накладзена шасцівалентная сістэма сувязей.

Вызначаем напрамкі рэакцый сувязей, разглядаючы іх як сілы процідзеяння актыўнай сіле F. Задачу рашаем, як і ў папярэднім прыкладзе, у два этапы: спачатку вызначаем сілы ўзаемадзеяння пліты з шарнірамі, што змешчаны ў яе вуглах A, B, C (абазначэнні адносяцца і да шарніраў-вузлоў). Найперш звернем увагу, што лініі дзеяння гэтых сіл, як і сілы F, знаходзяцца ў плоскасці пліты (яе таўшчынёй ігнаруем). Аналіз структуры сувязей паказвае, што шарніры па-рознаму рэагуюць на перадаваемае праз пліту ўздзеянне ад сілы F. Так, шарнір B пры ўздзеяннях, перпендыкулярных да стрыжня *3*, зусім не аказвае супраціўлення, бо можа свабодна перамяшчацца разам з гэтым стрыжнем вакол апоры B_1. У шарніра A ўсе ступені свабоды абмежаваны трыма сувязямі: *1*, *2*, *4*, таму ён рэагуе (процідзейнічае) на ўздзеянне сілы *любога* напрамку. Шарнір C здольны процідзейнічаць толькі сіле, лінія дзеяння якой знаходзіцца ў плоскасці стрыжняў *5* і *6*. У нашым прыкладзе да шарніра C прыкладзена сіла F_C, паралельная да вектара F; на рысунку 3.17, *б*, яна паказана пункцірнай стрэлкай. Трэцяя сіла F_A паводле тэарэмы аб трох паралельных сілах павінна быць паралельнай да вектараў F і F_C. Такім чынам, замацоўку пліты D схематычна можна прадставіць, як паказана на рысунку 3.17, *в* (від зверху). Далей пліту D уяўна адкідаем і разглядаем сістэмы стрыжняў *1*, *2*, *4* і *5*, *6* пад дзеяннем сіл F_A і F_C адпаведна, як у прыкладзе 9. Разглядаючы першую сістэму, уяўна адкідаем сувязь *4*; заўважаем, што раўнавага стрыжняў *1* і *2* не парушаецца, — шарнір A застаецца нерухомым. Значыць, $R_4 = 0$. Калі затым адкінем стрыжань *2*, то адлегласць паміж шарнірамі A і B_1 пад дзеяннем сілы F_A пачне павялічвацца. Гэта азначае, што ў зададзенай сістэме стрыжань *2* расцягнуты, яго рэакцыя R_2 на пліту накіравана ад пліты (*гл.* рыс. 3.17, *б*). Адкідаючы ўяўна стрыжань 1, прыдзем да высновы, што ў сістэме ён сціскаецца, а яго рэакцыя R_1 накіравана да пліты. Аналізуючы дзеянне сілы R_C на вузел C, атрымаем напрамкі рэакцый R_5, R_6, паказаныя на рысунку 3.17, *б*.

Выконваем праверку напрамкаў рэакцый. Запісваем умовы раўнавагі, кожная з якіх утрымлівае толькі адну невядомую рэакцыю. Для вызначэння кожнай рэакцыі выбіраецца свая асобная вось праекцый ці момантаў. Так, для вызначэння R_4 складаем: $\sum Y_i = R_4 \cos\beta = 0$, адкуль $R_4 = 0$. Каб знайсці R_2, запісваем $\sum M_{z'}(\vec{F_i}) = F(b-c) - R_2 \cos\alpha b = 0$. Атрымліваем: $R_2 = (b-c)F \,/\, b\cos\alpha$. Для вызначэння R_1 праводзім вось B_1u і пры складанні ўмоў раўнавагі ўлічваем, што $R_4 = 0$. Каб знайсці момант $M_u(\overrightarrow{R_1})$, рэакцыю R_1 раскладваем у плоскасці AEE_1A_1 на ўзаемаартаганальныя складаемыя (*гл.* рыс. 3.17, *г*): $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1'} + \overrightarrow{R_1''}$, дзе $\overrightarrow{R_1'} \parallel B_1u$, $R_1'' \perp B_1u$ і $R_1' = R_1 \sin\beta$, $R_1'' = R_1 \cos\beta$. Момант $M_u(\overrightarrow{R_1}) = M_u(\overrightarrow{R_1''})$. Патрэбная ўмова раўнавагі прымае выгляд: $\sum M_u(\overrightarrow{R_1}) = M_u(\vec{F}) - M_u(R_1'') = 0$ ці $Fh_1 - R_1 \cos\beta \cdot a = 0$, адсюль $R_1 = Fh_1/a\cos\beta$, дзе $h_1 = (b-c)\sin\beta$. Рэакцыю R_5 вызначаем з сумы момантаў адносна восі A_1z_1: $\sum M_{z_1}(\vec{F_i}) = R_5 \cos\alpha \cdot b - F \cdot c = 0$. Атрымліваем: $R_5 = cF \,/\, b\cos\alpha$. А каб знайсці рэакцыю R_6, выкарыстаем вось Ay_1; улічваем, што $R_3 = 0$. Вектар R_6 раскладваем у плоскасці BCC_1B_1 на ўзаемаартаганальныя складаемыя R_6', паралельную да восі A_{y_1}, і R_6'', перпендыкулярную да яе (*гл.* рыс. 3.17, *д*); пры гэтым $R_6'' = R_6 \cos\beta$. Запісваем умову раўнавагі: $\sum M_{y_1}(\vec{F_i}) = Fh_2 - R_6'' a = 0$; адгэтуль $R_6 = h_2F/a\cos\beta$, дзе $h_2 = c\sin\beta$. Як бачым, рэакцыі R_1, R_2, R_5, R_6 дадатныя. Значыць, іх напрамкі сапраўдныя.

ЗАДАННЕ 2

Аб'ектамі даследавання ў заданні з'яўляюцца плоскія статычна вызначальныя механічныя сістэмы, утвораныя з адной, дзвюх ці трох падсістэм. На кожную сістэму дзейнічае адна засяроджаная сіла F_i або адна пара сіл M_i. Неабходна выканаць структурны і якасны сілавы аналіз зададзенай механічнай сістэмы.

Пасля атрымання канкрэтнага варыянта задання студэнту неабходна:

1. Перанесці ў сшытак ці на фарматны ліст паперы зададзеныя механічныя сістэмы, захаваўшы на іх толькі адну нагрузку.

2. Падзяліць механічныя сістэмы на структурныя элементы (падсістэмы) і назваць тып і ўзровень кожнага з іх. Пераканацца, што сістэмы статычна вызначальныя.

3. Рацыянальна выбраць аб'екты раўнавагі і вызначыць напрамкі рэакцый зададзеных сувязей, не складаючы ўмоў раўнавагі.

У дадатку Б прыведзены варыянты заданняў (табл. Б.1) і схемы да заданняў (рыс. Б.1). Нумар варыянта задаецца выкладчыкам. Кожны варыянт уключае тры задачы. У табліцы нумары задач абазначаюцца дзвюма лічбамі (i, k), дзе i — нумар схемы механічнай сістэмы; k — нумар сілавога ўздзеяння (F_i, M_i), які неабходна пакінуць на схеме.

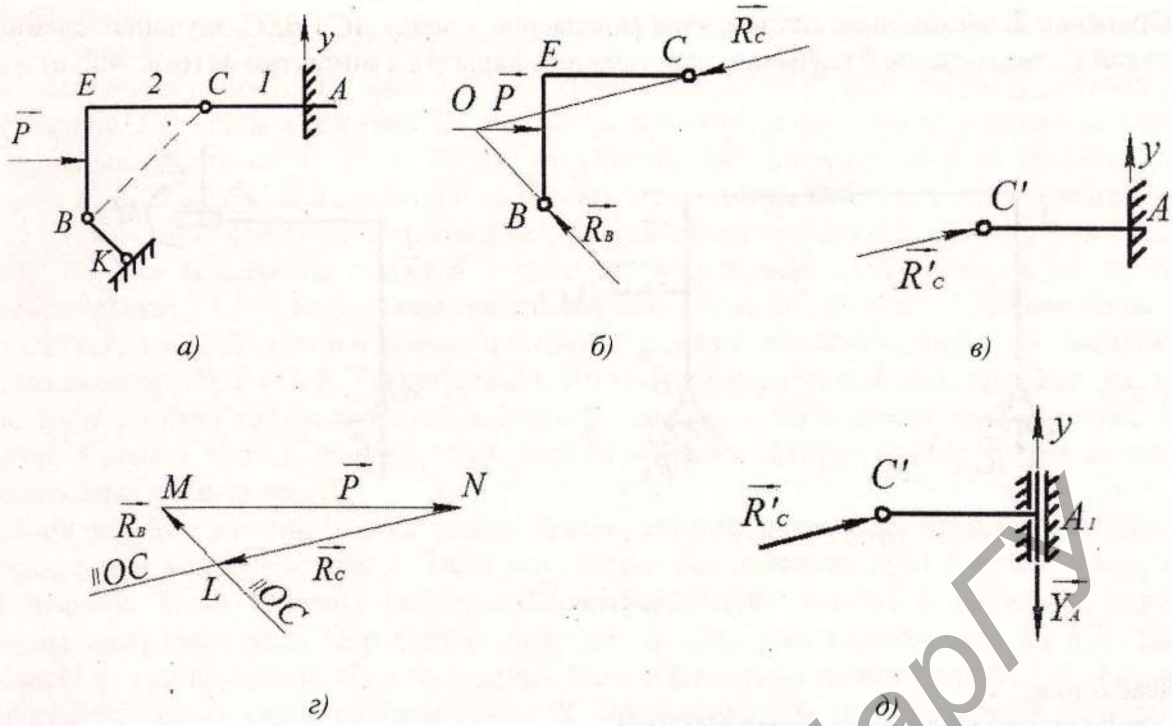
Для паспяховага выканання задання неабходна вывучыць па падручніку (ці па канспекту) тэму «Сувязі і іх рэакцыі», асаблівую ўвагу звярнуць на п. 2, 3 і дасканала разабрацца ў прыведзеных ніжэй прыкладах. Прыклады могуць быць надзвычай карыснымі, калі пры іх аналізе прытрымлівацца эфектыўнай методыкі: спачатку зрабіць настойлівую спробу атрымаць іх рашэнне самастойна, а затым параўнаць яго з рашэннем, прыведзеным у дапаможніку.

Прыклад 1. Механічная сістэма, якая складаецца з двух целаў, знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы P (рыс. 4.1, *а*).

Неабходна:

1) апісаць структуру сістэмы, падзяліўшы яе на структурныя элементы;

2) вызначыць напрамкі рэакцый R_C, R_B, прыкладзеных да цела BEC, і рэакцыю Y_A сувязі A.



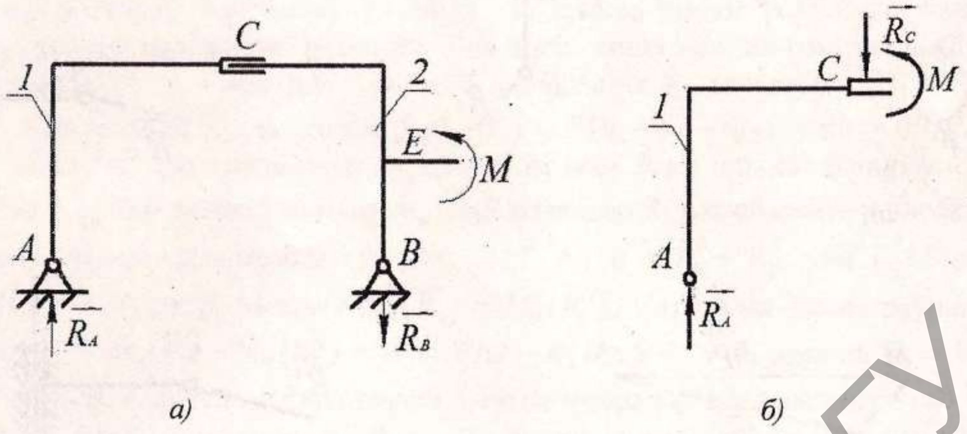
Рысунак 4.1

Рашэнне. Аналізуючы сістэму знешніх сувязей A і BK, заўважаем, што зададзеная механічная сістэма не належыць ні да адной з трох першасных сістэм, таму з'яўляецца складанай. Дзелім яе на дзве часткі па шарніру C (*гл.* рыс. 4.1, *б*, *в*). На цела AC накладзена трохвалентная знешняя сувязь A — жорсткая замацоўка. Значыць, гэта першасная базісная падсістэма першага тыпу (з аднаго цела) і першага ўзроўню. Абазначаем яе лічбамі 1.1. У цела BEC таксама трохвалентная сістэма сувязей далучэння; з іх аднавалентная BK — знешняя, двухвалентная C — унутраная. Яно ўяўляе першасную падсістэму першага тыпу другога ўзроўню — 1.2.

Для вызначэння напрамкаў рэакцый R_C, R_B у якасці аб'екта раўнавагі разглядаем падсістэму 1.2. Вызваляемся ад сувязей BK і C; замяняем іх рэакцыямі R_B, R_C. Лінія дзеяння рэакцыі R_B праходзіць праз шарніры B, K, значыць, па восі стрыжня. Працягваем яе да перасячэння з лініяй дзеяння сілы P у пункце O (*гл.* рыс. 4.1, *б*). Паколькі структурны элемент 1.2 знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл, то лінію дзеяння рэакцыі R_C таксама праводзім праз пункт O. Напрамкі рэакцый R_B, R_C вызначаем графічна — шляхам пабудовы трохвугольніка сіл. Для гэтага асобна чэрцім вектар P. Яго пачатак M і канец N з'яўляюцца вяршынямі трохвугольніка. Далей з пунктаў M і N праводзім лініі, паралельныя да OB і OC. У іх перасячэнні L знаходзім трэцюю вяршыню трохвугольніка сіл (*гл.* рыс. 4.1, *г*). Уяўна абыходзім контур трохвугольніка ў напрамку вектара P ($M \to N \to L \to M$) і ўстанаўліваем сапраўдныя напрамкі рэакцый R_B, R_C. Пераносім атрыманыя вектары на рысунак 4.1, *б*. Іх велічыні пры неабходнасці знаходзім шляхам вымярэння адпаведных старон сілавога трохвугольніка. Для вызначэння напрамку рэакцыі Y_A разглядаем падсістэму 1.1. На яе дзейнічае сіла R'_C, роўная і процілеглая па напрамку знойдзенай рэакцыі R_C (*гл.* рыс. 4.1, *д*). Каб увесці рэакцыю Y_A, паніжаем валентнасць сувязі A, замяняючы яе на сувязь A_1, якая дапускае вертыкальнае перамяшчэнне. Для ўтрымання стрыжня A_1C ад такога перамяшчэння прыкладваем адпаведную рэакцыю Y_A. Накіроўваем яе ўніз, паколькі сіла R_C (тут яна праяўляе сябе як актыўная) імкнецца рухаць цела 1.1 уверх.

Заўвага. Калі б у гэтым прыкладзе нагрузка была прыкладзена толькі да цела AC, то ў выніку атрымалі б $R_C = R_B = 0$, паколькі яе дзеянне не можа перадавацца на падсістэму вышэйшага ўзроўню.

Прыклад 2. Механічная сістэма, якая складаецца з целаў AC і BEC, злучаных слізгальнай замацоўкай C, знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары сіл з момантам M (рыс. 4.2, *а*).



Рысунак 4.2

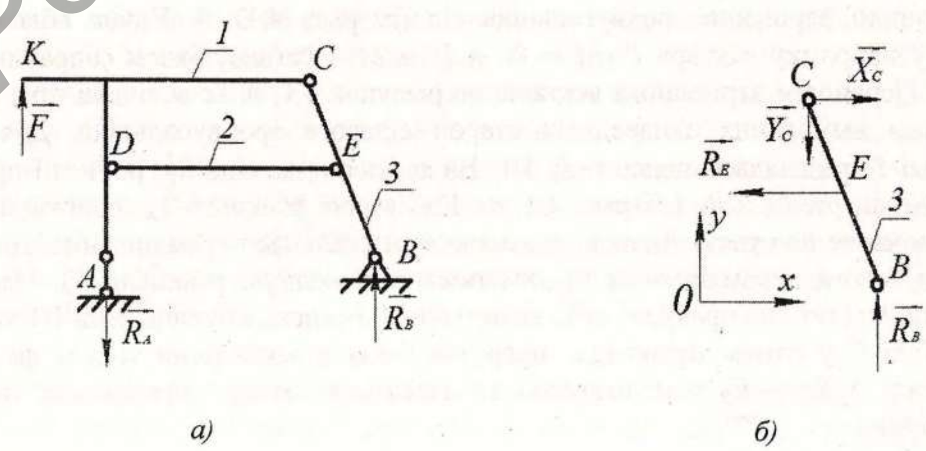
Неабходна:

1) апісаць структуру механічнай сістэмы;

2) устанавіць сапраўдныя напрамкі рэакцый R_A, R_B, R_C, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Рашэнне. Механічная сістэма на рысунку 4.2, *а*, уяўляе сабой дыяду, бо складаецца з двух целаў, на кожнае з якіх накладзена двухвалентная сувязь далучэння (A, B). Пры гэтым абедзве яны знешнія. Таму яна адносіцца да першасных падсістэм другога тыпу першага ўзроўню (базісная). Сістэму можна абазначыць лічбамі 2.1 і аднесці да простых, бо яна ўключае толькі адну падсістэму. Для вызначэння рэакцый R_A, R_B аб'ектам раўнавагі служыць уся сістэма. Паводле ўласцівасці 9 актыўная пара M ураўнаважваецца рэактыўнай парай (R_A, R_B) процілеглага напрамку. Значыць, вектар R_A арыентаваны ўверх, а паралельны да яго вектар $R_B = R_A$ — уніз. Але пакуль невядома, пад якім вуглом яны накіраваны. Каб устанавіць дакладны напрамак рэакцый R_A, R_B, разгледзім частку зададзенай сістэмы, напрыклад, левую (*гл.* рыс. 4.2, *б*). У злучэнні C да яе прыкладзена рэакцыя R_C і рэактыўная пара M_C. Тут дакладна вядомы напрамак вектара R_C — ён перпендыкулярны да напрамку ўзаемнага слізгання частак сістэмы, значыць, вертыкальны. А паколькі рэакцыі R_C і R_A таксама ўтвараюць пару (процілеглую M_C), то і вектар $R_A \parallel R_C$ вертыкальны. Пры гэтым $R_A = R_C = R_B = M / l$, дзе l — адлегласць паміж апорамі A і B. Яшчэ раз звяртаем увагу, што арыентацыя вектараў R_A, R_B вызначаецца накірункам вектара R_C, якія, у сваю чаргу, залежыць ад напрамку магчымага слізгання ў злучэнні C.

Прыклад 3. Механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы F (рыс. 4.3, *а*).



Рысунак 4.3

Неабходна:

1) апісаць структуру зададзенай сістэмы;

2) вызначыць сапраўдныя напрамкі рэакцый R_A, R_B, R_C, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Рашэнне. Як відаць з рысунка 4.3, *а*, зададзеная механічная сістэма складаецца з целаў *1*, *2*, *3*, злучаных шарнірамі *C*, *D*, *E*. На яе накладзена трохвалентная сістэма знешніх сувязей далучэння *A*, *B*. Значыць, яна адносіцца да трэцяга тыпу першасных падсістэм першага ўзроўню (п. 19 (*гл.* с. 8)) і таму статычна вызначальная, абазначаецца лічбамі 3.1. Сістэму можна назваць простай, бо яна складаецца з адной першаснай падсістэмы. Прыгледзімся да яе бліжэй. У сістэме стрыжні *2* і *3* не нагружаны знешнімі сіламі. Ці можна лічыць іх сувязямі-стрыжнямі? Калі гэта так, то лініі дзеяння рэакцый гэтых стрыжняў павінны супадаць з прамымі, што злучаюць шарніры *D*, *E* і *C*, *B*. Так, стрыжань *DE* тут сапраўды можна разглядаць як унутраную сувязь. І гэта можна паспяхова выкарыстаць у сілавым аналізе механічнай сістэмы. А вось стрыжань *3* нельга лічыць сувяззю, таму што ён нагружаны (праз шарнір *E*) унутранай сілай узаемадзеяння са стрыжнем *2*.

Лінія дзеяння рэакцыі R_A, як і сама сувязь, вертыкальная. Каб устанавіць яе дакладны напрамак, уяўна адкінем сувязь *A*. Тады ўся сістэма пад дзеяннем сілы *F* пачне паварочвацца вакол шарніра *B* па стрэлцы гадзінніка. Для ўтрымання сістэмы ў раўнавазе вектар R_A неабходна накіраваць уніз. Пераходзім да апоры *B*. Нам ужо вядома, што $R_A \parallel F$. Паводле ўласцівасці 6, вектар трэцяй сілы R_B павінен быць паралельны да вектараў R_A і *F*. Удакладнім яго напрамак. Цяпер уяўна адкінем апору *B*. Заўважым, што ўся механічная сістэма пачне паварочвацца па стрэлцы гадзінніка вакол замацаванага шарніра *A*, пункт *B* пры гэтым будзе апускацца. Утрымаць яго можа сіла R_B, накіраваная ўверх (*гл.* рыс. 4.3, *а*). Як бачым на рысунку, сілы *F* і R_B імкнуцца рухаць сістэму ўверх, іх ураўнаважвае сіла R_A процілеглага напрамку. Таму $R_A = F + R_B$.

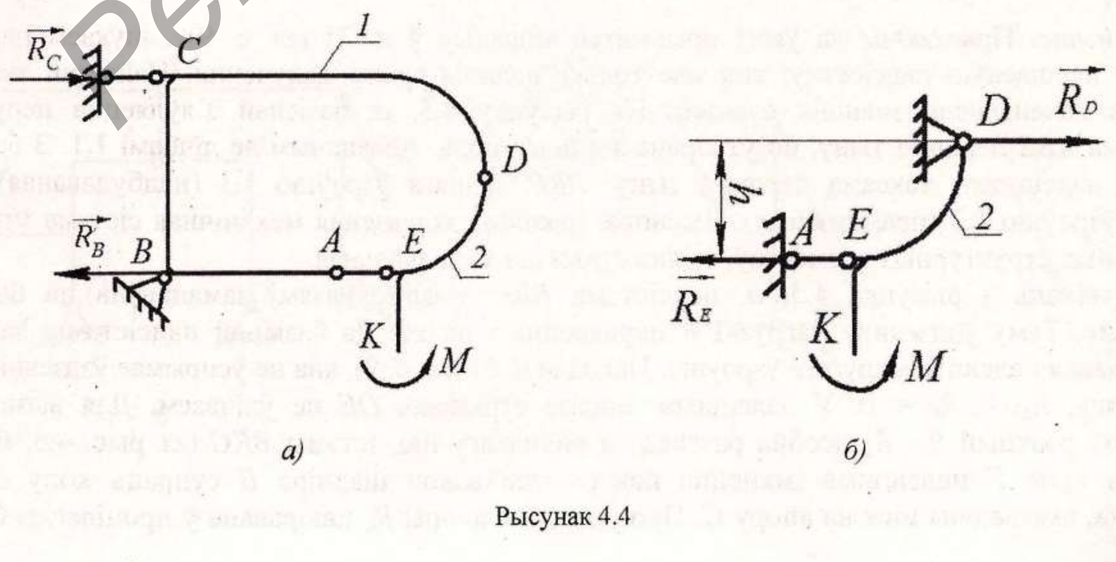
Для вызначэння напрамку рэакцыі R_C разгледзім у раўнавазе стрыжань *3*. На яго дзейнічаюць тры сілы. Каб стрыжань не паварочваўся вакол пункта *C* пад дзеяннем сілы R_B, рэакцыю R_E накіроўваем улева. Вектар R_C прадстаўляем у выглядзе сумы: $\vec{R}_C = \vec{X}_C + \vec{Y}_C$. Сіла R_E імкнецца зрушыць свабоднае цела *3* улева, таму пры яго раўнавазе рэакцыя X_C накіравана ўправа. Аналагічна дзеянне сілы R_B ураўнаважвае рэакцыя Y_C, накіраваная ўніз (*гл.* рыс. 4.3, *б*). Дакладны напрамак вектара R_C можа быць знойдзены пры рашэнні задачы ў ліках. Інакш напрамак рэакцыі R_C можна вызначыць шляхам пабудовы трохвугольніка сіл (пры вядомых значэннях R_B, R_E).

Прыклад 4. На механічную сістэму *ABCDEK* дзейнічае пара сіл з момантам *M* (рыс. 4.4, *а*).

Неабходна:

1) выканаць аналіз структуры механічнай сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) выбраць аб'екты раўнавагі і вызначыць сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей *B*, *C*, *D*.

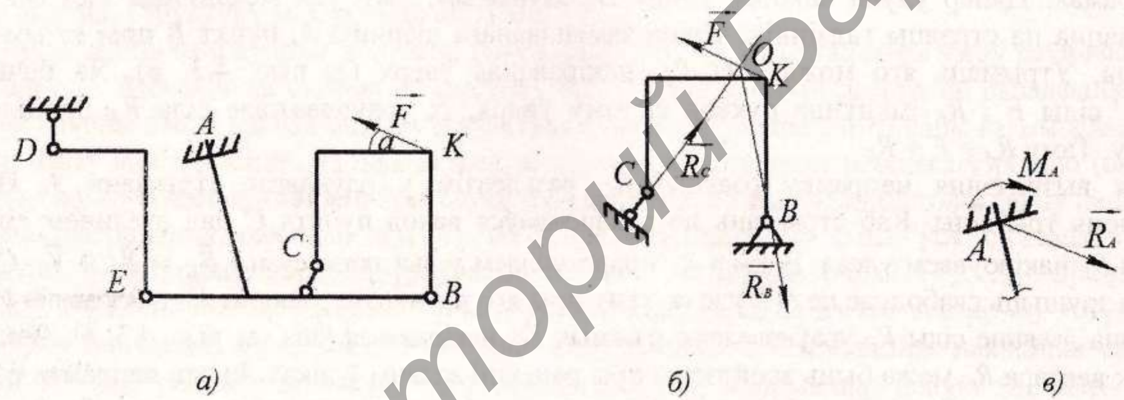


Рысунак 4.4

Рашэнне. Зададзеная сістэма складаецца з целаў *1*, *2*, на якія накладзены знешнія сувязі *B*, *C* і ўнутраныя *D*, *AE*. На контурны стрыжань *1* (*ABCD*) накладзена трохвалентная сістэма знешніх сувязей *B*, *C*, таму ён адносіцца да першаснай падсістэмы першага тыпу і першага ўзроўню (базісная). Стрыжань *2* (*DEK*) далучаны да падсістэмы першага тыпу з дапамогай трохвалентнай сістэмы ўнутраных сувязей *D*, *AE*. Ён уяўляе сабой першасную (першага тыпу) падсістэму трэцяга ўзроўню (надбудаваная). Яе можна абазначыць лічбамі 1.3. Паколькі сістэма складаецца выключна з апісаных тыпавых падсістэм, то яна статычна вызначальная. Дзеянне нагрузкі, прыкладзенай да стрыжня *ABCD*, не перадаецца на стрыжань *DEK*.

Для вызначэння напрамкаў рэакцый R_B, R_C разглядаем раўнавагу ўсёй сістэмы. На яе дзейнічае знешняя пара *M*. Згодна ўласцівасці 9, яна ўраўнаважваецца рэактыўнай парай (R_B, R_C) процілеглага напрамку. Значыць, вектар R_C накіраваны ўправа, а паралельны да яго вектар R_B — улева (*гл.* рыс. 4.4, *а*). Пры гэтым $R_B = R_C = M / l$, дзе $l = BC$. Рэакцыю R_D вызначаем з раўнавагі стрыжня *2* (*гл.* рыс. 4.4, *б*). Паводле ўласцівасці 9, рэакцыя R_E накіравана ўлева па восі стрыжня *AE*. Тады вектар рэакцыі R_D паралельны да вектара R_E і накіраваны ўправа. Знаходзім велічыні: $R_D = R_E = M / h$, дзе $h = l / 2$.

Прыклад 5. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы *F* (рыс. 4.5, *а*).



Рысунак 4.5

Неабходна:

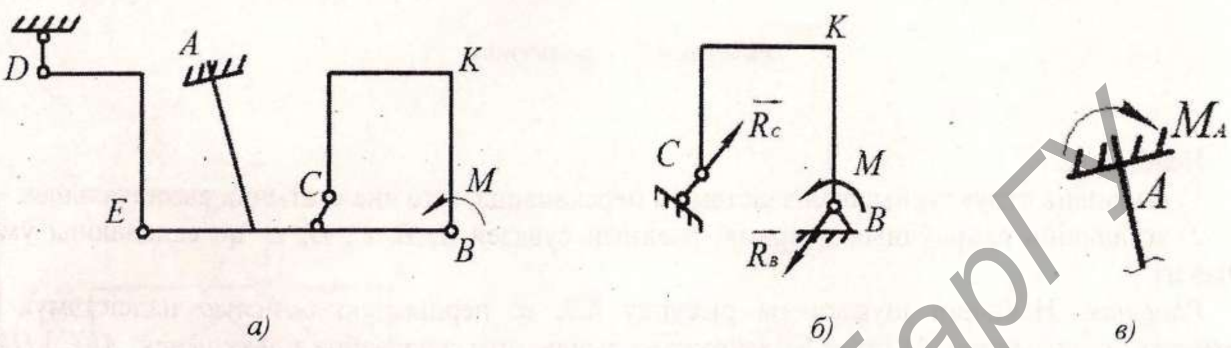
1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) устанавіць сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей *A*, *B*, *C*, *D*, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Рашэнне. Прымаючы да ўвагі прыкметы, апісаныя ў п. 21 (*гл.* с. 9) , шукаем на схеме *базісную* першасную падсістэму; яна мае толькі знешнія сувязі далучэння. Найперш звяртаем увагу на валентнасць знешніх сувязей. На рысунку 4.5, *а*, базіснай з'яўляецца нерухомая падсістэма *ABE* першага тыпу, бо ўтворана з аднаго цела. Абазначым яе лічбамі 1.1. З базіснай злучаны падсістэмы таксама першага тыпу: *BKC* трэцяга ўзроўню 1.3 (надбудаваная) і *DE* другога ўзроўню 1.2 (прамежкавая). Выснова: паколькі зададзеная механічная сістэма ўтворана з першасных структурных элементаў, то яна статычна вызначальная.

Як відаць з рысунка 4.5, *а*, падсістэма *BKC* усімі сувязямі замацавана на базіснай падсістэме. Таму ўздзеянне нагрузкі *F* перадаецца і на яе. Да базіснай падсістэмы далучана ненагружаная падсістэма другога ўзроўню. Паводле п. 21 (*гл.* с. 9), яна не ўспрымае ўздзеяння сілы *F*. Значыць, $R_D = R_E = 0$. У далейшым аналізе стрыжань *DE* не ўлічваем. Для вызначэння напрамкаў рэакцый R_C, R_B асобна разгледзім раўнавагу падсістэмы *BKC* (*гл.* рыс. 4.5, *б*). Пад дзеяннем сілы *F* падсістэма імкнецца павярнуцца вакол шарніра *B* супраць ходу стрэлкі гадзінніка, аказваючы ціск на апору *C*. Процідзеянне апоры R_C накіравана ў процілеглы бок, як паказана на рысунку 4.5, *б*. Калі ўяўна адкінуць апору B, то пад дзеяннем сілы F пункт B рамы пачне падымацца. Рэакцыя апоры R_B павінна ўтрымліваць яго, таму накіравана ўніз. Дакладна яе лінія дзеяння праходзіць праз пункт O, у якім перасякаюцца лініі дзеяння сіл R_C і F (уласцівасць 5). Для вызначэння рэакцый жорсткай замацоўкі разглядаем раўнавагу часткі *AECBK*. Актыўная сіла F імкнецца пасунуць яе ў напрамку вектара $\vec{F}$ і павярнуць адносна цэнтра замацоўкі A супраць ходу стрэлкі гадзінніка. Значыць рэактыўнае процідзеянне R_A і M_A накіравана супраць (*гл.* рыс. 4.5, *в*).

Прыклад 6. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары сіл з момантам M (рыс. 4.6, *а*).



Рысунак 4.6

Неабходна:

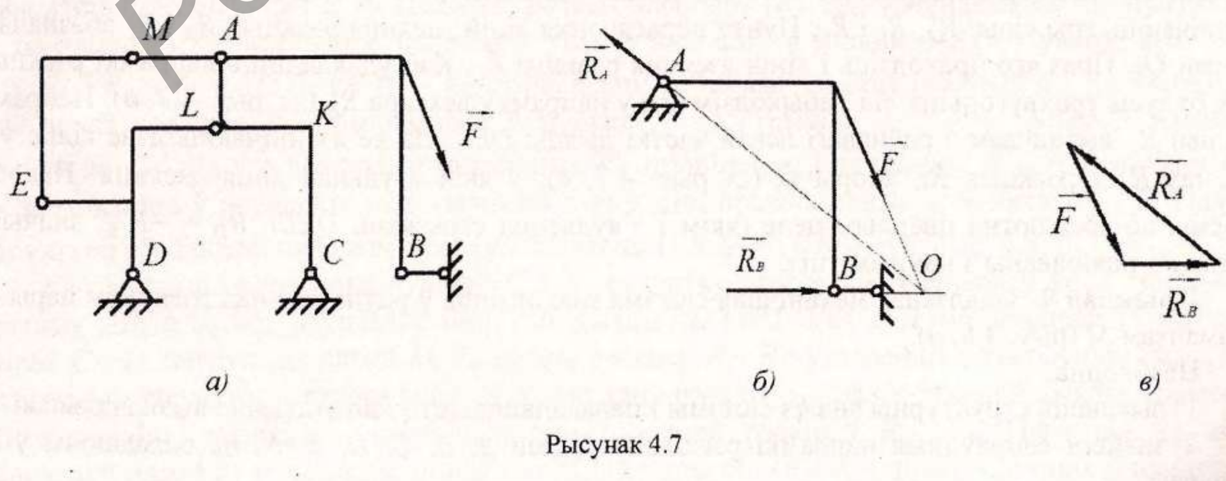
1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) знайсці сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, B, C, D, не складаючы ўмоў раўнавагі.

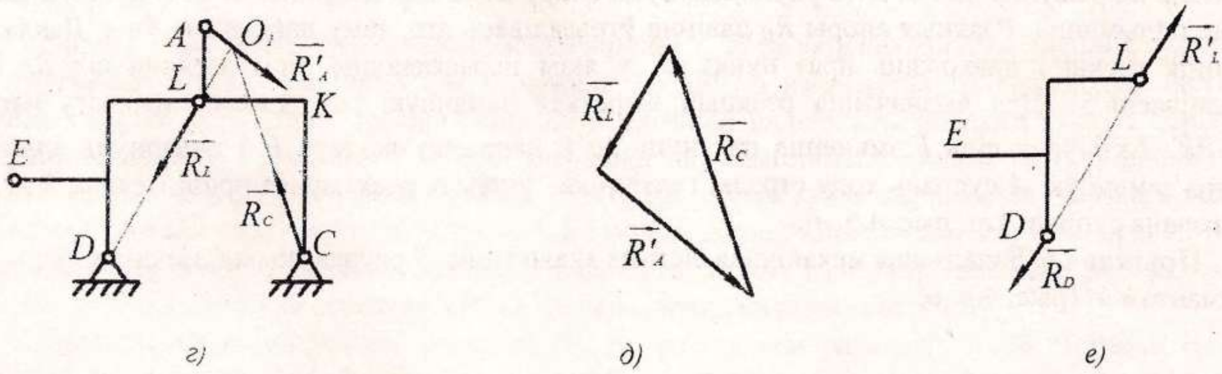
Рашэнне. Як бачым, на рысунку 4.6, *а*, прадстаўлена тая ж механічная сістэма, што і ў папярэднім прыкладзе. Адрозненне толькі ў знешнім уздзеянні. Там і паказана яе статычная вызначальнасць.

Як і ў прыкладзе 5, падсістэма *DE* не нагружана: $R_D = R_E = 0$. Для вызначэння напрамкаў рэакцый R_B, R_C разглядаем ураўнаважаную падсістэму *BKC* (*гл.* рыс. 4.6, *б*). Паводле ўласцівасці 9, актыўная пара M ураўнаважваецца рэактыўнай парай (R_B, R_C) процілеглага напрамку. Арыентацыя ліній дзеяння рэакцый R_B, R_C вызначаецца воссю апорнага стрыжня C. Для вызначэння рэакцый жорсткай замацоўкі A аб'ектам раўнавагі служыць частка механічнай сістэмы *AECBK*. Пара імкнецца павярнуць яе супраць руху стрэлкі гадзінніка. Рэактыўнае процідзеянне пары M_A накіравана ў процілеглы бок (*гл.* рыс. 4.6, *в*).

Прыклад 7. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы F (рыс. 4.7, *а*).



Рысунак 4.7



Рысунак 4.7 — Заканчэнне

Неабходна:

1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) устанавіць сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, B, C, D, E, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Рашэнне. Найперш шукаем на рысунку 4.7, *а*, першасную *базісную* падсістэму. Па прыкметах, апісаных у п. 21 (*гл.* с. 9), заўважаем дыяду, што складаецца з двух целаў: AKC і DEL. На кожнае з іх накладзена двухвалентная знешняя сувязь. Дыяда належыць да другога тыпу першасных падсістэм першага ўзроўню (2.1). Яшчэ адна дыяда AME не мае знешніх сувязей, таму адносіцца да надбудаваных (2.3). На стрыжань AB накладзена аднавалентная знешняя сувязь B; ён належыць да першага тыпу структурных элементаў другога ўзроўню (прамежкавы). Высновa: паколькі зададзеная складаная сістэма ўтворана з першасных падсістэм, то яна статычна вызначальная.

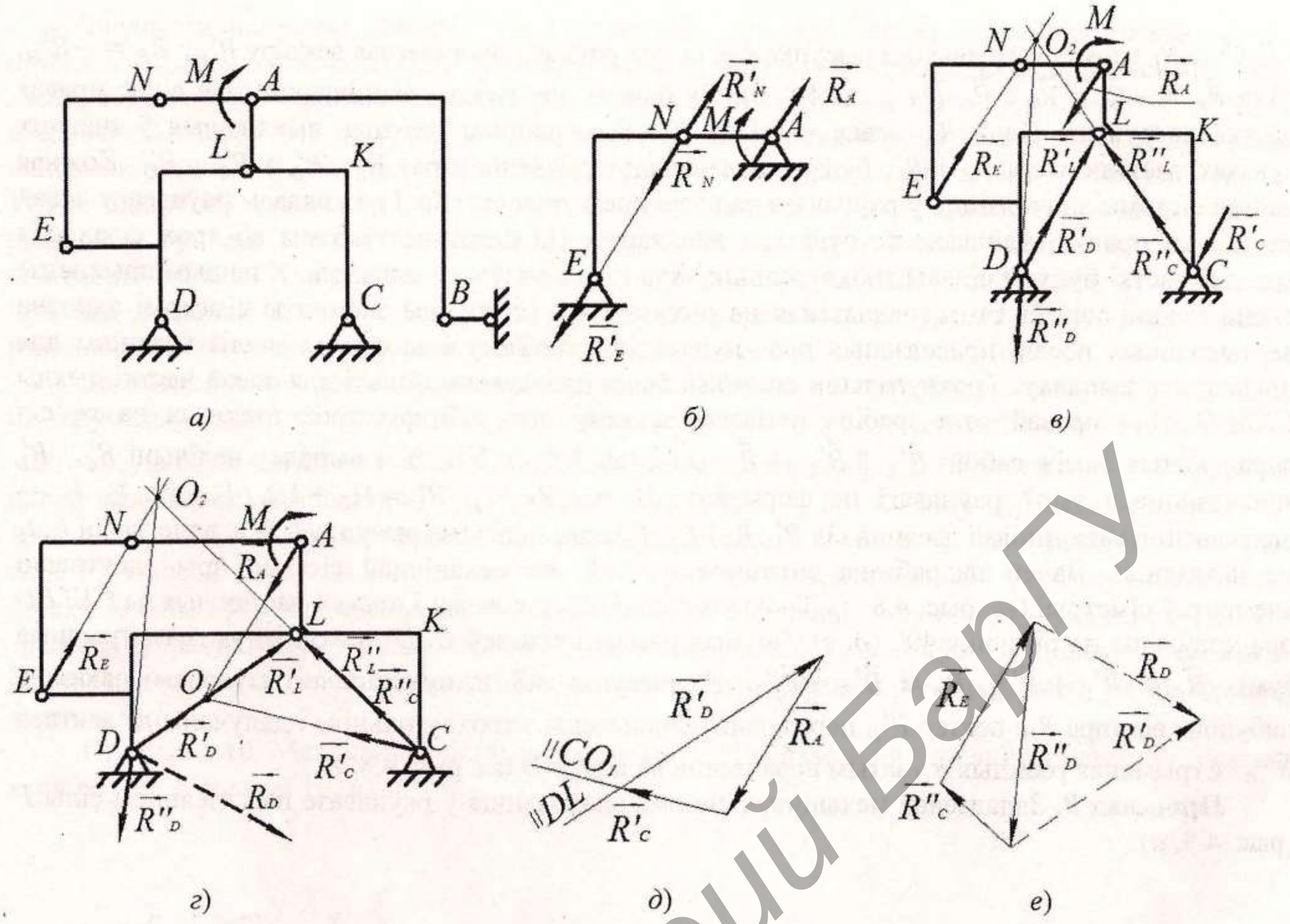
Сувязі A і B накладзены на стрыжань AB, таму ён і служыць аб'ектам раўнавагі для вызначэння рэакцый R_A, R_B. Як бачым, на аб'ект раўнавагі дзейнічаюць тры сілы. Паводле адпаведнай тэарэмы, яны павінны перасякацца ў адным пункце O, які вызначаецца лініямі дзеяння сілы F і рэакцыі R_B (*гл.* рыс. 4.7, *б*). Каб дакладна ўстанавіць напрамкі вектараў R_A, R_B, будуем трохвугольнік сіл і абыходзім яго ў напрамку вектара F — супраць стрэлкі гадзінніка (*гл.* рыс. 4.7, *в*). Нагадваем: напрамкі рэакцый, атрыманыя з дапамогай трохвугольніка сіл, справядлівыя для рэакцый, *прыкладзеных да аб'екта раўнавагі*. Да целаў жа, з якімі змацаваны аб'ект раўнавагі, тыя ж рэакцыі накіраваны ў процілеглыя бакі. Таму, пераходзячы да базіснай падсістэмы $AKCDL$, вектар $R_A' = R_A$ накіроўваем уніз (з нахілам) і разглядаем як актыўную сілу (*гл.* рыс. 4.7, *г*). Дзеянне гэтай сілы, паводле ўласцівасці 21, не перадаецца на надбудаваную падсістэму AME, значыць, $R_M = R_E = 0$. Разглядаем базісную дыяду. Левая яе частка DEL не нагружана, таму ўяўляе сабой сувязь, накладзеную на аб'ект раўнавагі AKC. Лінія дзеяння яе рэакцыі R_L задаецца напрамкам DL. На аб'ект раўнавагі, як і вышэй на рысунку 4.7, *б*, дзейнічаюць тры сілы: R_A', R_L і R_C. Пункт перасячэння ліній дзеяння рэакцый R_A' і R_L абазначаем літарай O_1. Праз яго праходзіць і лінія дзеяння рэакцыі R_C. Каб удакладніць напрамкі рэакцый, зноў будуем трохвугольнік сіл і абыходзім яго у напрамку вектара R_A' (*гл.* рыс. 4.7, *д*). Напрамак рэакцыі R_D вызначаем з раўнавагі левай часткі дыяды DEL. На яе дзейнічаюць дзве сілы: ужо вядомая R_L' і рэакцыя R_D апоры D (*гл.* рыс. 4.7, *е*), у якіх агульная лінія дзеяння. Паводле аксіёмы аб абсалютна цвёрдым целе (якім і з'яўляецца стрыжань DEL), $\vec{R}_D = -\overrightarrow{R'}_E$, значыць, вектар R_D накіраваны з нахілам уніз.

Прыклад 8. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары сіл з момантам M (рыс. 4.8, *а*).

Неабходна:

1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) знайсці сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, B, C, D, E, N, не складаючы ўмоў раўнавагі.



Рысунак 4.8

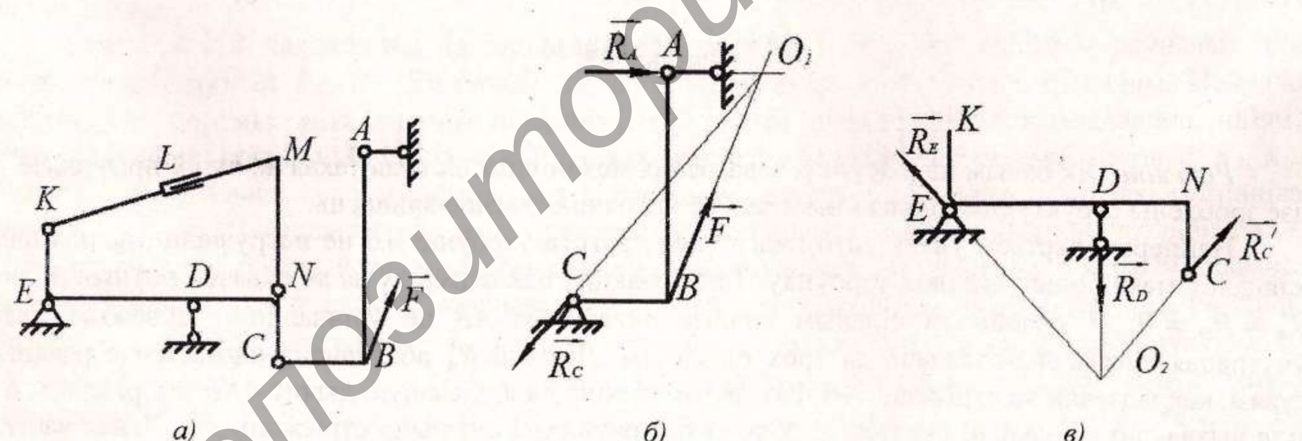
Рашэнне. Як бачым на рысунку, зададзеная механічная сістэма такая ж, як і ў прыкладзе 7, дзе зроблены структурны аналіз і паказана яе статычная вызначальнасць.

Найперш звяртаем увагу, што падсістэма другога ўзроўню AB не нагружана і не злучана з падсістэмамі больш высокіх узроўняў. Таму рэакцыі накладзеных на яе сувязей роўныя нулю: $R'_A = R_B = 0$. У далейшым сілавым аналізе падсістэма AB не ўлічваецца. Заўважым, што ўнутраная сувязь A належыць да трох падсістэм. Літарай R'_A абазначана кампанента рэакцыі сувязі, накладзенай на стрыжань AB. Разгледзім асобна надбудаваную дыяду ANE (*гл.* рыс. 4.8, *б*). Для вызначэння рэакцый сувязей A, N аб'ектам раўнавагі служыць стрыжань AN. Левая частка EN дыяды разглядаецца як сувязь, накладзеная на аб'ект раўнавагі. Лінія дзеяння яе рэакцыі R_N праходзіць праз шарніры E, N. Паколькі рэактыўная пара (R_A, R_N) ураўнаважвае актыўную пару M, то рэакцыю R_N неабходна накіраваць уніз (з нахілам), а рэакцыю R_A — уверх; пры гэтым $\vec{R}_A \parallel \vec{R}_N$ і $R_A = R_N = M / l_1$, дзе l_1 — адлегласць паміж лініямі дзеяння рэакцый R_A, R_N. Нагадваем: знойдзеная рэакцыя R_N прыкладзена ў пункце N да стрыжня AN. Але пункт N належыць і стрыжню EN. Да яго прыкладзена рэакцыя R'_N процілеглага напрамку: $\vec{R}'_N = -\vec{R}_N$. Стрыжань EN знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем дзвюх сіл, прыкладзеных у пунктах N і E. Паводле тэарэмы аб абсалютна цвёрдым целе (уласцівасць 1) $\vec{R}'_E = -\vec{R}'_N$ (*гл.* рыс. 4.8, *б*).

Каб вызначыць рэакцыі сувязей C і D, спачатку разгледзім раўнавагу ўсёй сістэмы без стрыжня AB, а затым раўнавагу базіснай дыяды $CKLED$. Уся сістэма замацавана на дзвюх апорах C і D, нагружана парай M. Значыць, рэакцыі R_C, R_D утвараюць рэактыўную пару, таму ў далейшым аналізе дастаткова знайсці толькі адну рэакцыю. Аналіз базіснай дыяды неабходны, каб устанавіць дакладнае становішча ліній дзеяння рэакцый R_C, R_D. Нагрузка на дыяду ствараецца парай M у выглядзе іншай актыўнай пары сіл (R_A, R_E), прыкладзеных у шарнірах A

і E. Сілу R_E можна вызначыць з рысунка 4.8, *б*, яна роўная і процілеглая вектару $\vec{R}'_E$: $\vec{R}_E = -\vec{R}'_N$. Сіла $\vec{R}_A = -\vec{R}_E$ і $\vec{R}_A \parallel \vec{R}_E$ (*гл.* рыс. 4.8, *в*). Як бачым, на дыяду дзейнічаюць дзве сілы: правая частка нагружана сілай R_A, левая — сілай R_E. У далейшым рэакцыі, выкліканыя ў знешніх сувязях дзеяннем сіл R_A і R_E, будзем абазначаць адпаведна праз R'_C, R'_D і R''_C, R''_D. Кожная частка сістэмы знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл. Калі разглядаем раўнавагу левай часткі, то правую ўлічваем як сувязь, і наадварот. На падставе тэарэмы аб трох сілах для кожнай часткі будуем сілавы трохвугольнік. Але гэта не заўжды магчыма. У нашым прыкладзе схема механічнай сістэмы, пададзеная на рысунку 4.8 (*а*, *в*), мае элементы сіметрыі адносна вертыкальных восей, праведзеных праз пункты A і N. Таму і яе сілавы аналіз уласцівы для прыватнага выпадку. Трохвугольнік сіл можа быць пабудаваны толькі для левай часткі дыяды $CKLED$. Для правай гэта зрабіць немагчыма, таму што вектары трох дзеючых на яе сіл паралельныя паміж сабой: $\vec{R}'_L \parallel \vec{R}'_C \parallel \vec{R}_A$ (*гл.* рыс. 4.8, *в*). У гэтым выпадку велічыні R'_C, R'_L знаходзяцца з умоў раўнавагі па формулах: $R_C = l_1 R_A / l_3$; $R'_L = (l_2 + l_3) / l_3$, дзе l_2, l_3 — адлегласці паміж лініямі дзеяння сіл R'_L, R_A і R'_L, R_C адпаведна (на рысунку 4.8, *в*, адлегласці l_2, l_3 не паказаны). Далей падрабязна спынімся на той жа механічнай сістэме пры адсутнасці элементаў сіметрыі (*гл.* рыс. 4.8, *г*). Трохвугольнікі сіл для левай і правай частак дыяды $CKLED$ прадстаўлены на рысунку 4.8, (*д*, *е*). Поўныя рэакцыі сувязей C, D знаходзім як геаметрычныя сумы: $\vec{R}_C = \vec{R}'_C + \vec{R}''_C$, $\vec{R}_D = \vec{R}'_D + \vec{R}''_D$. На рысунку 4.8, д, пункцірнымі стрэлкамі паказана пабудова вектара R_D: вектар $\vec{R}'_D$ паралельна перанесены з трохвугольніка і далучаны да вектара $\vec{R}''_D$. Атрыманая рэакцыя R_D затым перанесена на апору D (*гл.* рыс. 4.8, *г*).

Прыклад 9. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы F (рыс. 4.9, *а*).



Рысунак 4.9

Неабходна:

1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) знайсці сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, C, D, E, K, L, N, не складаючы ўмоў раўнавагі.

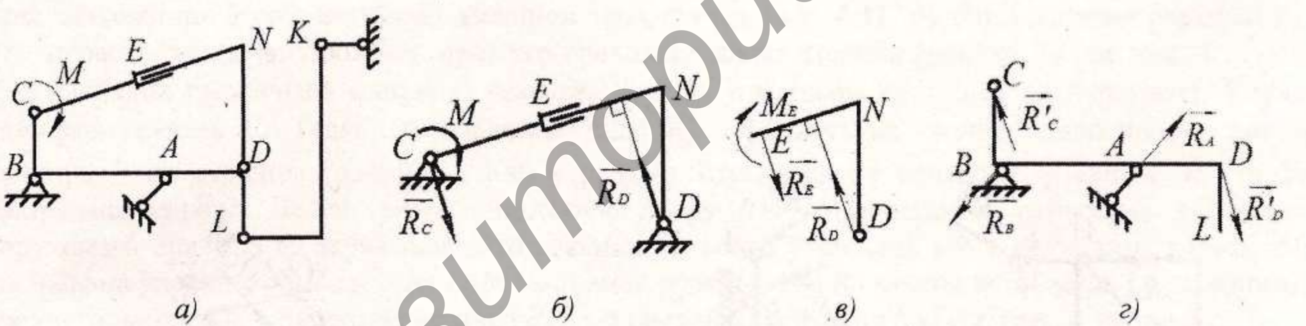
Рашэнне. Найперш паводле прыкмет, прыведзеных у п. 21 (*гл.* с. 9), шукаем базісную першасную падсістэму. Яна заўжды ўсімі знешнімі сувязямі далучэння замацоўваецца на нерухомай аснове (падмурку). Такім у зададзенай сістэме з'яўляецца стрыжань $CDEK$. Ён адносіцца да падсістэм першага тыпу. З ім злучаны два структурныя элементы: прамежкавая падсістэма ABC (другога ўзроўню) і надбудаваная дыяда $KLMN$ (трэцяга ўзроўню).

Выснова: паколькі зададзеная сістэма дзеліцца на структурныя элементы, то яна статычна вызначальная.

Знаходзім напрамкі рэакцый. Падсістэма ABC (*гл.* рыс. 4.9, *б*) нагружана трыма сіламі, прыкладзенымі ў пунктах A, B, C. Значыць, паводле тэарэмы аб трох сілах (уласцівасць 5), лініі дзеяння гэтых сіл павінны перасякацца ў адным пункце. Такі пункт (на рысунку 4.9, *б*, абазначаны літарай O_1) знаходзіцца на перасячэнні ліній дзеяння сілы F і рэакцыі R_A. Дакладны напрамак рэакцый R_A, R_C можна ўстанавіць з дапамогай трохвугольніка сіл. Зробім гэта інакш. Уяўна адкідваем сувязь A. Тады стрыжань пад дзеяннем сілы F пачне паварочвацца вакол шарніра C супраць стрэлкі гадзінніка. Каб утрымаць яго ў раўнавазе, рэакцыю R_A неабходна накіраваць управа. Аналагічна, замацаваўшы шарнір A і ўяўна адкінуўшы сувязь C, заўважым, што пад дзеяннем сілы F канец стрыжня C пачне перамяшчацца ўправа. Таму для раўнавагі рэакцыю R_C неабходна накіраваць улева па лініі дзеяння O_1C (*гл.* рыс. 4.9, *б*).

Звернемся далей да надбудаванай дыяды $KLMN$. Яна не нагружана знешнімі сіламі, да яе не далучаны іншыя падсістэмы. Па гэтай прычыне рэакцыі ўсіх сувязей роўныя нулю: $R_K = R_N = R_L = 0$. Да базіснай дыяды $CDEK$ (*гл.* рыс. 4.9, *в*) прыкладзена толькі адна сіла $\overrightarrow{R'_C} = -\overrightarrow{R_C}$, якую цяпер разглядаем як знешнюю, і накладзена дзве сувязі — D і E. Зноў прымяняем тэарэму аб трох сілах. Лініі дзеяння рэакцый павінны перасякацца ў пункце O_2, што задаецца вектарам сілы R'_C і воссю стрыжня D (*гл.* рыс. 4.9, *в*). Уяўна адкідваем сувязь D. Стрыжань $CDEK$ пад дзеяннем сілы R'_C пачне паварочвацца вакол шарніра E супраць ходу стрэлкі гадзінніка. Каб яго трымаць у раўнавазе, рэакцыю R_D неабходна накіраваць уніз. Уяўна адкідваючы сувязь E і разважаючы аналагічна, прыходзім да высновы, што рэакцыя R_E накіравана ўверх па лініі дзеяння O_2E.

Прыклад 10. Механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары сіл, момант якой роўны M (рыс. 4.10, *а*).



Рысунак 4.10

Неабходна:

1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) знайсці сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, B, C, D, E, K, L, не складаючы ўмоў раўнавагі.

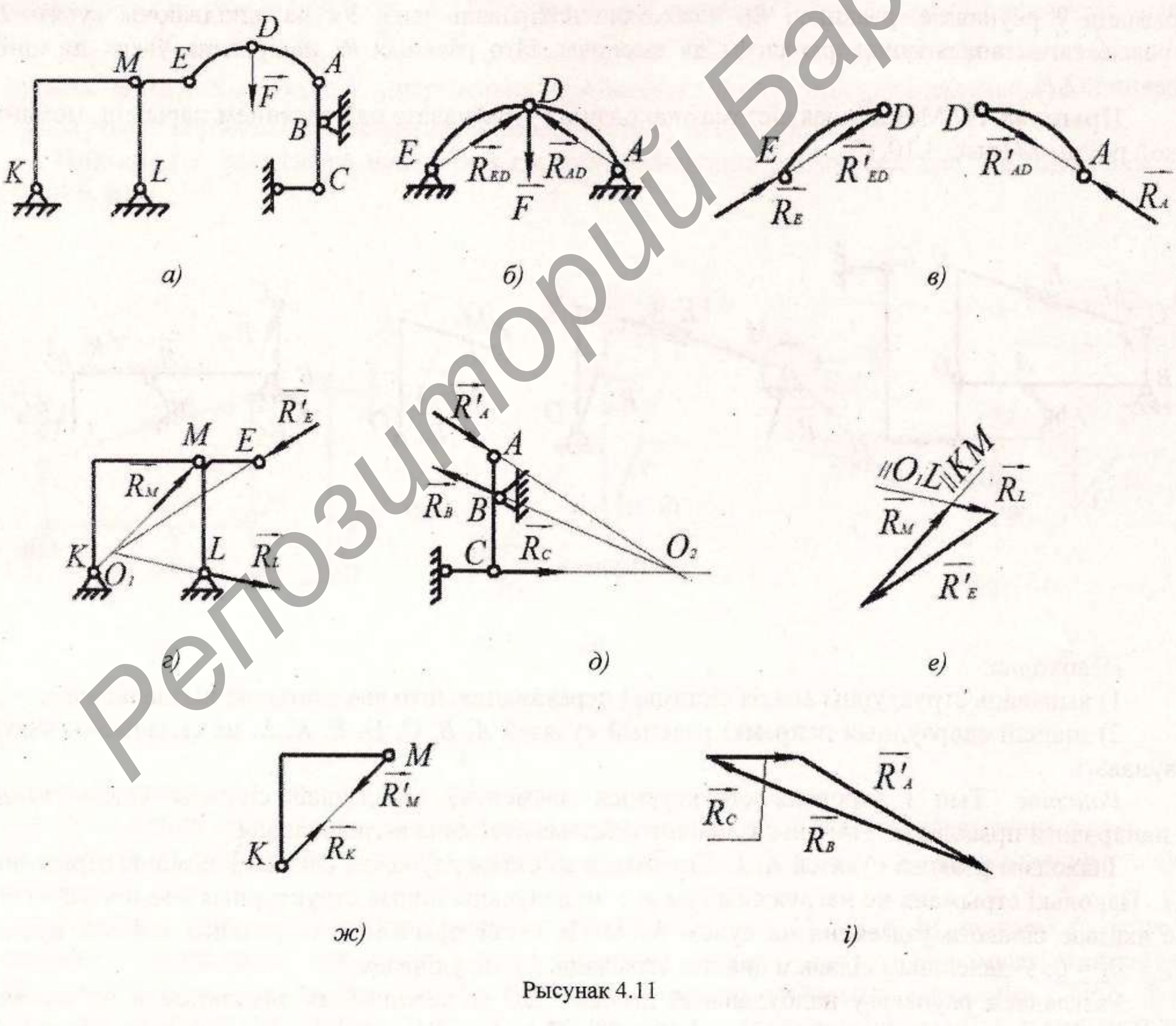
Рашэнне. Тып і ўзровень структурных элементаў зададзенай сістэмы ўстаноўлены ў папярэднім прыкладзе. Там і паказана, што сістэма статычна вызначальная.

Знаходзім рэакцыі сувязей K, L. Для гэтага аб'ектам раўнавагі служыць ломаны стрыжань KL. Паколькі стрыжань не нагружаны і да яго не далучаны іншыя структурныя элементы, то ён не аказвае сілавога ўздзеяння на сувязі K, L. Па гэтай прычыне і іх рэакцыі роўныя нулю: $R_K = R_L = 0$. У далейшым сілавым аналізе стрыжань KL не ўлічваем.

Разглядаем раўнавагу надбудаванай дыяды CED са слізгальным злучэннем E яе частак. Выдзяляем дыяду асобна (*гл.* рыс. 4.10, *б*). Паводле ўласцівасці 9, актыўная пара M ураўнаважваецца рэактыўнай парай (R_C, R_D) процілеглага напрамку. Пакуль невядомы нахіл ліній дзеяння рэакцый R_C, R_D. Паколькі $R_C \parallel R_D$, то дастаткова ўстанавіць нахіл аднаго вектара, напрыклад, R_D. Для гэтага разгледзім раўнавагу левай часткі DNE (*гл.* рыс. 4.10, *в*).

У слізгальным злучэнні E на стрыжань EM дзейнічае рэакцыя R_E і пара M_E. Дакладна вядома, што вектар R_E перпендыкулярны да стрыжня EN. Рэакцыя R_D, як устаноўлена вышэй, уваходзіць у пару (R_C, R_D), процілеглую да пары M. Значыць, вектар R_D арыентаваны ўверх (з нахілам). Пара M_E павінна быць ураўнаважана парай (R_E, R_D). Адсюль вынікае, што $R_D \parallel R_E$, таму $R_D \perp EN$. Як бачым на рысунку, рэактыўная пара (R_C, R_D) накіравана супраць стрэлкі гадзінніка. Пры раўнавазе аб'екта DNE пара M_E павінна быць накіравана па стрэлцы гадзінніка. Вектар R_C паралельны да вектара R_D, бо ўтварае з ім пару сіл. Значэнні рэакцый R_C, R_D можна знайсці па формуле $R_C = R_D = M / l_1$, дзе l_1 — адлегласць паміж лініямі дзеяння рэакцый. Нагадваем, што знойдзеныя рэакцыі R_C, R_D прыкладзены да аб'екта раўнавагі CED. Пераходзячы да базіснай дыяды $CBAL$, змяняем іх напрамкі на процілеглыя і абазначаем тымі ж літарамі са штрыхамі: R'_C, R'_D (гл. рыс. 4.10, *г*). Пару (R'_C, R'_D) разглядаем цяпер як актыўную. Яна ўраўнаважваецца рэакцыямі R_A, R_B сувязей A і B, якія таксама ўтвараюць пару сіл (R_A, R_B). Арыентацыя ліній дзеяння рэакцый задаецца прамой, што праходзіць праз шарніры стрыжня B.

Прыклад 11. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем сілы F (рыс. 4.11, *а*).



Рысунак 4.11

Неабходна:

1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

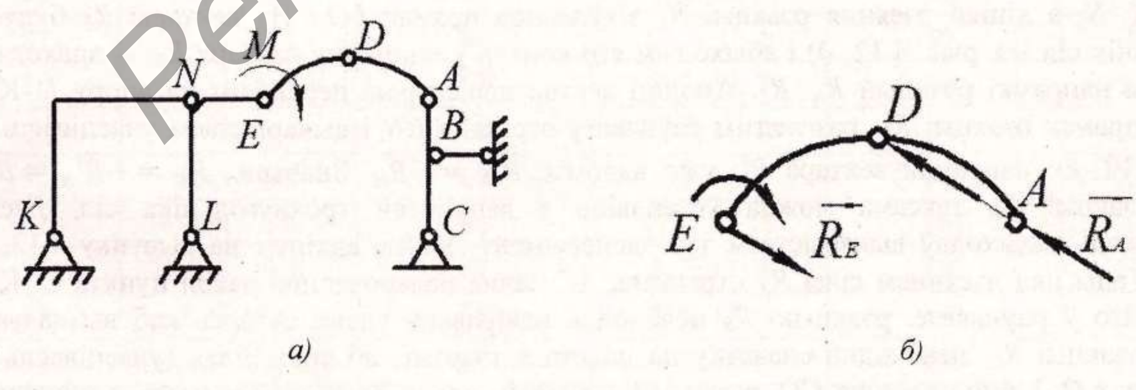
2) знайсці сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, B, C, D, E, L, K, M, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Рашэнне. Спачатку шукаем па прыкметах, апісаных у п. 21 (*гл.* с. 9), базісныя падсістэмы. Галоўная прыкмета: яны ўсімі знешнімі сувязямі замацаваны на нерухомай аснове (падмурку). У зададзенай механічнай сістэме да базісных адносяцца структурныя элементы ABC і $ELKM$ адпаведна першага і другога тыпаў. Падсістэма ADE складаецца з двух целаў і не мае знешніх сувязей. Гэта надбудаваная дыяда — падсістэма другога тыпу трэцяга ўзроўню (2.3). Выснова: паколькі зададзеная складаная сістэма ўтворана са структурных элементаў, то яна статычна вызначальная.

Пачынаем з вызначэння напрамкаў рэакцый сувязей, накладзеных на падсістэму трэцяга ўзроўню ADE. Выдзяляем яе асобна (*гл.* рыс. 4.11, *б*). Спачатку ў якасці аб'екта раўнавагі разглядаем шарнір D. На яго накладзены сувязі AD і ED. Лініі дзеяння іх рэакцый R_{AD} і R_{ED} праходзяць праз шарніры A, D і E, D. На рысунку 4.11, *б*, рэакцыі стрыжняў прыкладзены да шарніра D. Дзеянні R'_{AD}, R'_{ED} нагружанага сілай F шарніра на стрыжні накіраваны ў процілеглыя бакі (*гл.* рыс. 4.11, *в*), пры гэтым $\vec{R}'_{AD} = -\vec{R}_{AD}$, $\vec{R}'_{ED} = -\vec{R}_{ED}$. Разглядаючы раўнавагу стрыжняў AD, ED, нагружаных сіламі R'_{AD}, R'_{ED}, знаходзім напрамкі рэакцый R_A, R_E (*гл.* рыс. 4.11, *в*).

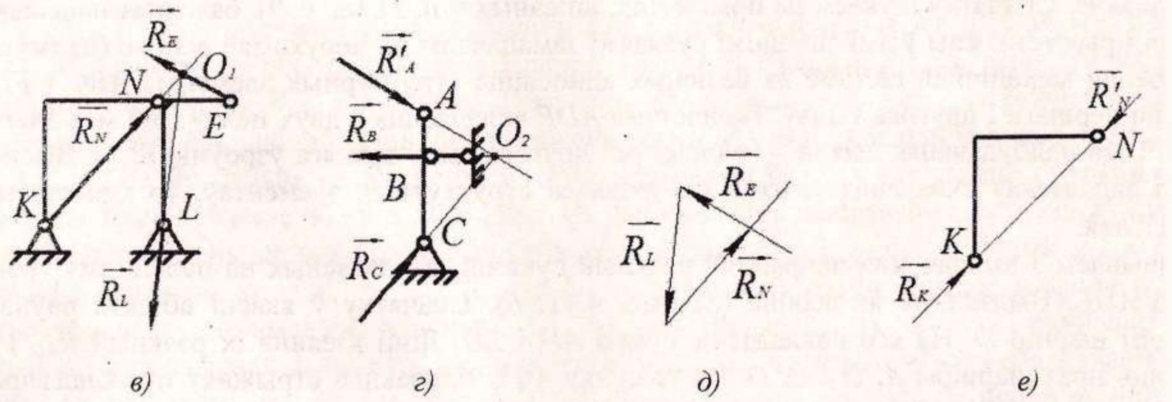
Пераходзім да базісных падсістэм (*гл.* рыс. 4.11, *г*, *д*). Яны нагружаны сіламі $\vec{R}'_A = -\vec{R}_A$ і $\vec{R}'_E = -\vec{R}_E$, якія цяпер разглядаем як актыўныя. Для вызначэння рэакцый сувязей K, L, M аб'ектам раўнавагі служыць стрыжань EML. Ненагружаная левая частка KM дыяды разглядаецца як накладзеная на яго сувязь, лінія дзеяння рэакцыі якой праходзіць праз шарніры K, M. Апошняя перасякаецца ў пункце O_1 з лініяй дзеяння сілы R'_E. Праз пункт O_1 праводзім лінію дзеяння рэакцыі R_L. Каб вызначыць дакладна напрамкі рэакцый R_L, R_M, будуем трохвугольнік сіл, што дзейнічаюць на аб'ект раўнавагі EML, і абыходзім яго контур у напрамку вектара $\vec{R}'_E$ (*гл.* рыс. 4.11, *е*). Напрамак рэакцыі R_K вызначаем, разглядаючы раўнавагу левай часткі дыяды, на якую дзейнічае сіла $\vec{R}'_M = -\vec{R}_M$. Звяртаемся да падсістэмы ABC, якая знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем трох сіл (*гл.* рыс. 4.11, *д*). Лініі дзеяння рэакцый R'_A і R_C перасякаюцца ў пункце O_2; праз яго праводзім лінію дзеяння рэакцыі R_B (*гл.* рыс. 4.11, *д*). Каб дакладна вызначыць напрамкі вектараў R_C, R_B, праводзім наступны эксперымент. Уяўна адкідваем сувязь C. Тады пад дзеяннем сілы R'_A стрыжань AC пачне паварочвацца вакол шарніра B па стрэлцы гадзінніка. Каб утрымаць стрыжань ад павароту, рэакцыю $\vec{R}_C$ трэба накіраваць управа. Далей, уяўна адкідаючы апору B і паварочваючы стрыжань AC вакол нерухомага шарніра C, заўважым, што рэакцыя R_B можа ўтрымаць яго ў раўнавазе, калі будзе накіравана ўлева па лініі дзеяння O_2B. Напрамак рэакцый R_B, R_C можна ўстанавіць і з дапамогай трохвугольніка сіл, а напрамак вектара R_K — з раўнавагі стрыжня KM (*гл.* рыс. 4.11, *ж*, *і*).

Прыклад 12. Зададзеная механічная сістэма знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары сіл, момант якой роўны M (рыс. 4.12, *а*).



а) *б)*

Рысунак 4.12



Рысунак 4.12 — Заканчэнне

Неабходна:

1) выканаць структурны аналіз сістэмы і пераканацца, што яна статычна вызначальная;

2) знайсці сапраўдныя напрамкі рэакцый сувязей A, B, C, D, E, L, K, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Рашэнне. Структурны аналіз зададзенай механічнай сістэмы выкананы, устаноўлена яе статычная вызначальнасць у прыкладзе 11.

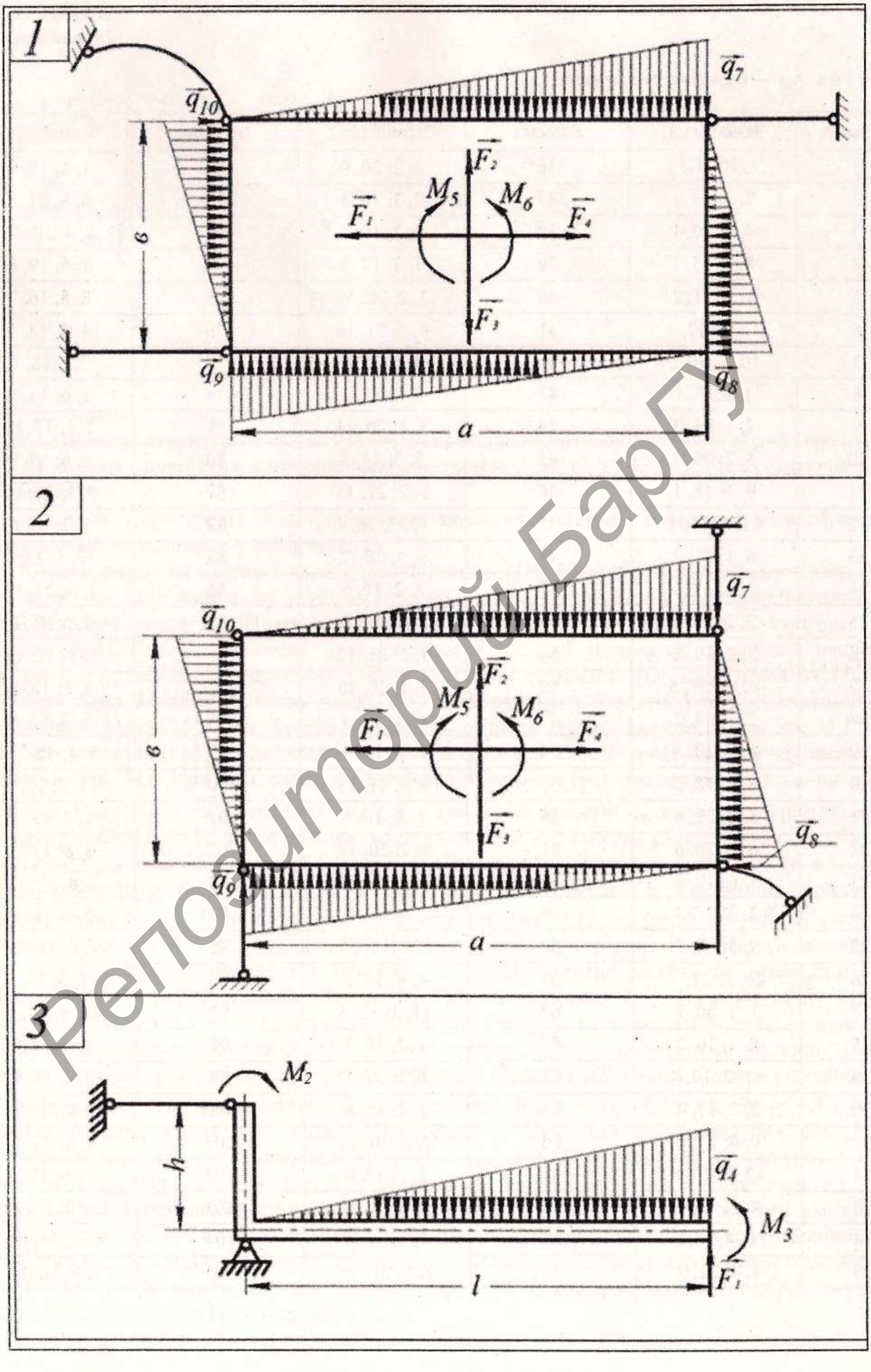
Сілавы аналіз пачынаем з надбудаванай дыяды ADE. Выдзяляем яе асобна (*гл.* рыс. 4.12, *б*). Для вызначэння напрамкаў рэакцый сувязей A, D, E разглядаем у раўнавазе нагружаную парай M левую частку DE. Правы ненагружаны стрыжань AD з'яўляецца для яе сувяззю, лінія дзеяння рэакцыі якой праходзіць праз шарніры A, D. Каб устанавіць сапраўдны напрамак рэакцыі R_D, правядзём эксперымент. Уяўна адкідваем стрыжань AD. Тады левая частка пад дзеяннем пары M паварочваецца вакол пункта E па стрэлцы гадзінніка. Каб утрымаць яе ў раўнавазе, рэакцыю R_D неабходна накіраваць супраць стрэлкі гадзінніка (*гл.* рыс. 4.12, *б*). Звяртаем увагу, што аб'ект раўнавагі DE на дзвюх апорах DA і E знаходзіцца ў раўнавазе пад дзеяннем пары M. Гэтая пара, паводле ўласцівасці 9, павінна ўраўнаважвацца рэактыўнай парай (R_D, R_E). Таму $\vec{R}_E = -\vec{R}_D$, значыць, $\vec{R}_E \parallel \vec{R}_D$. Напрамак вектара R_A вызначаем, разглядаючы раўнавагу ўсёй дыяды ADE. Ён павінен разам з вектарам R_E утвараць рэактыўную пару (R_A, R_E), процілеглую да пары M. Для гэтага вектар R_A трэба накіраваць улева з нахілам (*гл.* рыс. 4.12, *б*).

Пераходзім да базісных падсістэм. Нагрузкай (дзеяннем) для іх з'яўляюцца знойдзеныя рэакцыі сувязей A і E процілеглага напрамку (*гл.* рыс. 4.12, *в*, *г*): $\vec{R}'_A = -\vec{R}_A, \vec{R}'_E = -\vec{R}_E$. Напрамкі рэакцый R_N, R_L знаходзім, разглядаючы раўнавагу стрыжня ENL. На яго накладзены дзве сувязі: нерухомы шарнір L і стрыжань KN. Лінія дзеяння рэакцыі R_N праходзіць праз шарніры K, N, а лініяй дзеяння рэакцыі R_L з'яўляецца прамая LO_1. На вектары R_E будуем трохвугольнік сіл (*гл.* рыс. 4.12, *д*) і абыходзім яго контур у напрамку вектара R_E — знаходзім сапраўдныя напрамкі рэакцый R_N, R_L. Апошні вектар паралельна пераносім на апору L. Каб знайсці напрамак рэакцыі R_K, разгледзім раўнавагу стрыжня KN і выкарыстаем уласцівасць 1 (*гл.* рыс. 4.12, *е*); напрамак вектара R'_N ужо вядомы: $\vec{R}'_N = -\vec{R}_N$. Значыць, $\vec{R}_K = -\vec{R}'_N = \vec{R}_N$. Кірунак рэакцыі R_B таксама можна ўстанавіць з дапамогай трохвугольніка сіл. Дзеля разнастайнасці падыходаў выкарыстаем тут эксперымент. Уяўна адкінем на рысунку 4.12, *г*, сувязь B. Тады пад дзеяннем сілы R'_A стрыжань AC пачне паварочвацца вакол пункта C. Каб утрымаць яго ў раўнавазе, рэакцыю R_B неабходна накіраваць улева. А вось каб вызначыць напрамак рэакцыі R_C, неабходна спачатку на падставе тэарэмы аб трох сілах (уласцівасць 5) знайсці пункт O_2 і лінію дзеяння CO_2 рэакцыі R_C, а затым працягнуць эксперымент, адкінуўшы ўяўна сувязь C. Заўважым, што для раўнавагі стрыжня AC вектар R_C патрэбна накіраваць управа з нахілам па лініі дзеяння CO_2 (*гл.* рыс. 4.12, *г*).

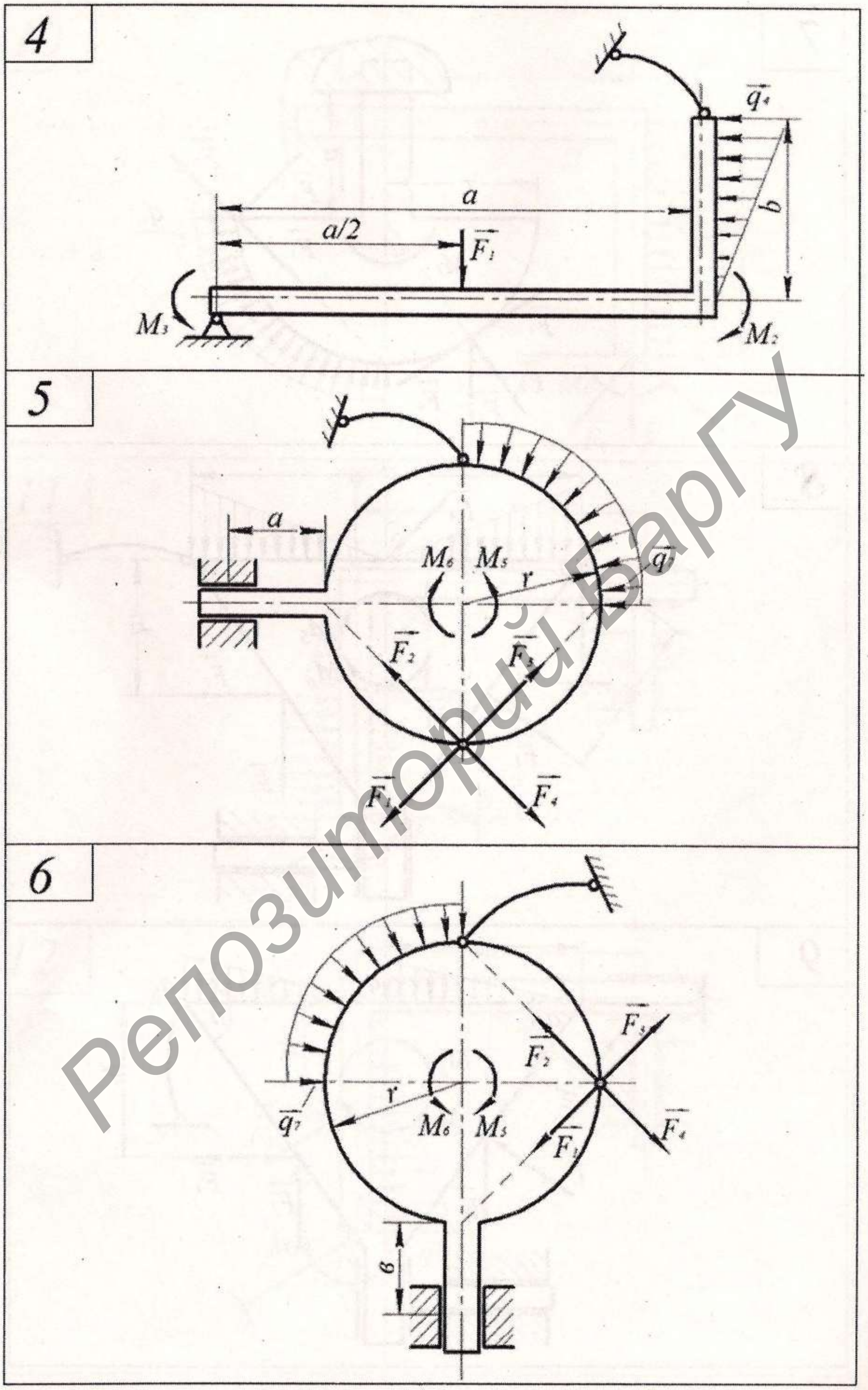
ДАДАТАК А
(абавязковы)

Т а б л і ц а А.1 — Варыянты да задання 1

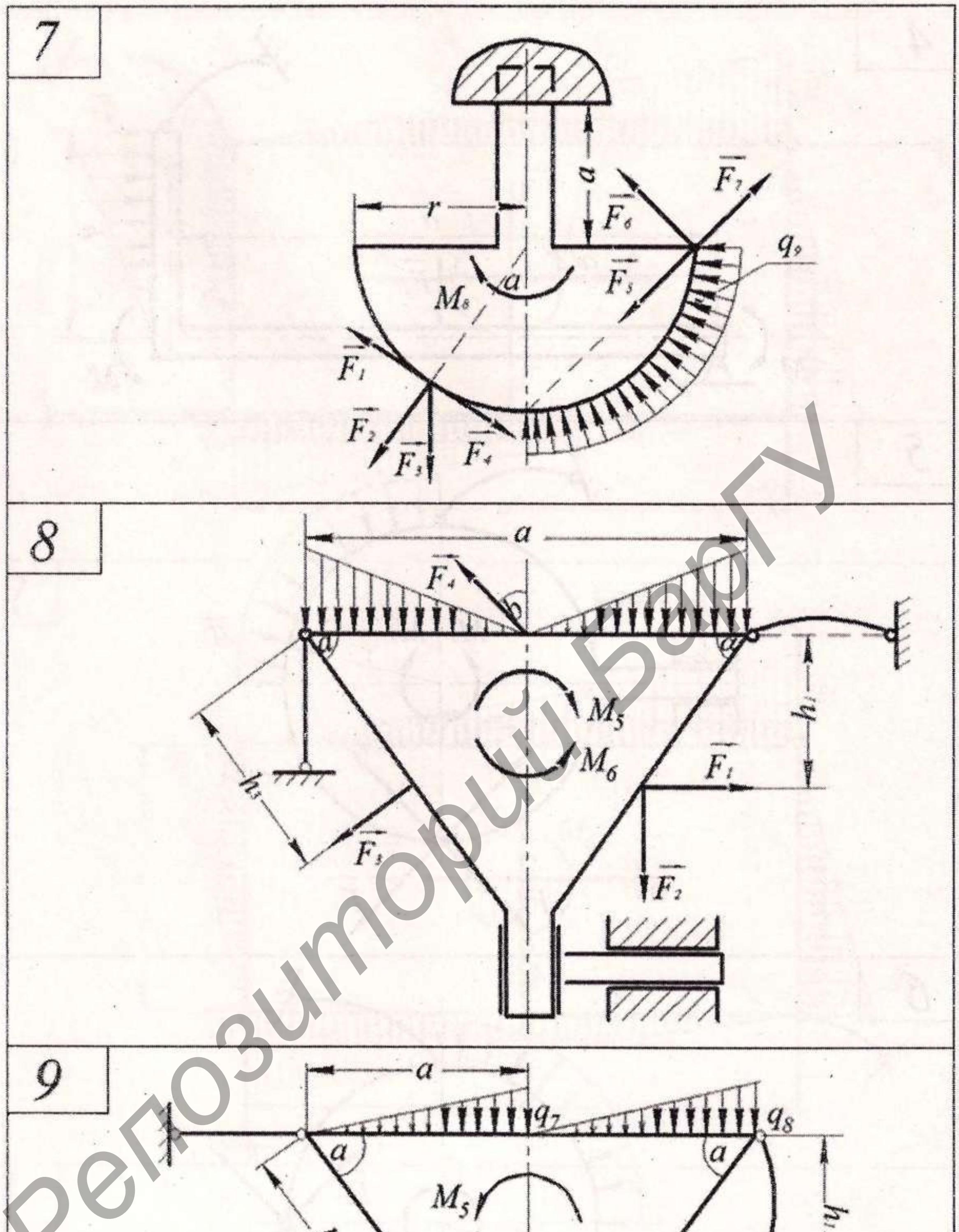
Варыянт	Заданні (i, k)	Варыянт	Заданні (i, k)	Варыянт	Заданні (i, k)
1	1, 10; 21, 1	36	5, 2; 20, 9	71	1, 4; 17, 9
2	3, 4; 14, 1	37	7, 3; 16, 3	72	8, 8; 15, 6
3	4, 1; 20, 1	38	4, 2; 19, 5	73	2, 4; 20, 16
4	8, 1; 15, 1	39	1, 3; 17, 5	74	1, 5; 19, 8
5	1, 9; 21, 2	40	3, 2; 20, 10	75	8, 8; 16, 7
6	12, 1; 17, 1	41	6, 3; 21, 10	76	4, 3; 14, 7
7	10, 1; 20, 2	42	8, 6; 18, 5	77	2, 5;18, 7
8	1, 8;19, 1	43	9, 5; 15, 3	78	1, 6; 13, 7
9	7, 1; 21, 3	44	3, 1; 20, 11	79	2, 3; 17, 10
10	8, 2; 20, 3	45	5, 3; 14, 3	80	5, 6; 19, 9
11	9, 1; 18, 1	46	1, 2; 21, 11	81	9, 8; 20, 17
12	11, 1; 16, 1	47	12, 3; 16, 4	82	1, 7; 13, 6
13	6, 1; 21, 4	48	5, 4; 20,12	83	12, 5; 15, 7
14	7, 2; 17, 2	49	3, 2; 19, 6	84	2, 6; 21, 17
15	9, 2; 20, 4	50	1, 1; 17, 6	85	7, 6; 16, 8
16	2, 1; 19, 2	51	9, 1; 21, 12	86	1, 8; 17, 11
17	10, 2; 21, 5	52	7, 4; 20, 13	87	8, 6; 18, 8
18	5, 1; 14, 2	53	6, 5; 15, 4	88	5, 7; 14, 8
19	1, 7; 20, 5	54	6, 4; 14, 4	89	2, 7; 19, 10
20	8, 3; 18, 2	55	9, 6; 21, 13	90	11, 4; 13, 5
21	5, 4; 21, 6	56	1, 3; 16, 5	91	4, 2; 13, 4
22	6, 2; 20, 6	57	8, 7; 20, 14	92	8, 8; 13, 3
23	1, 6; 19, 3	58	3, 3; 21, 14	93	2, 8; 17, 12
24	3, 3; 17, 3	59	2, 1; 17, 7	94	6, 6; 16, 9
25	9, 3; 18, 3	60	12, 4; 17, 7	95	7, 7; 19, 11
26	10, 3; 21, 7	61	4, 4; 14, 5	96	11, 5; 15, 8
27	1, 5; 20, 7	62	11, 3; 15, 5	97	10, 6; 13, 2
28	8, 4; 16, 2	63	2, 2; 19, 7	98	2, 9; 14, 9
29	11, 2; 19, 4	64	10, 5; 21, 15	99	12, 6; 17, 13
30	2, 2; 17, 4	65	1, 1; 16, 6	100	7, 8; 21, 18
31	9, 4; 21, 8	66	7, 5; 20, 15	101	4, 1; 13, 1
32	12, 2; 20, 8	67	3, 2; 17, 8	102	11, 6; 18, 9
33	8, 5; 18, 4	68	2, 3; 14, 6	103	2, 10; 19, 12
34	10, 4; 15, 2	69	9, 7; 13, 8	104	6, 7; 14, 10
35	1, 4; 21, 9	70	5, 5; 21, 16	105	7, 9; 16, 10



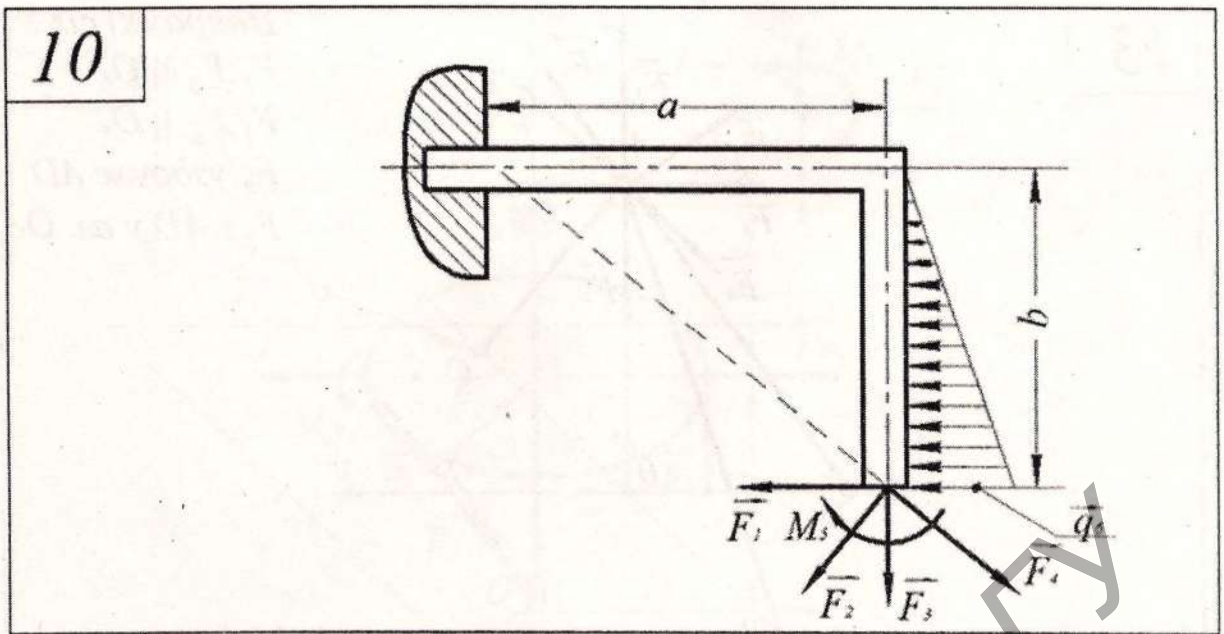
Рысунак А.1 — Схемы да задання 1

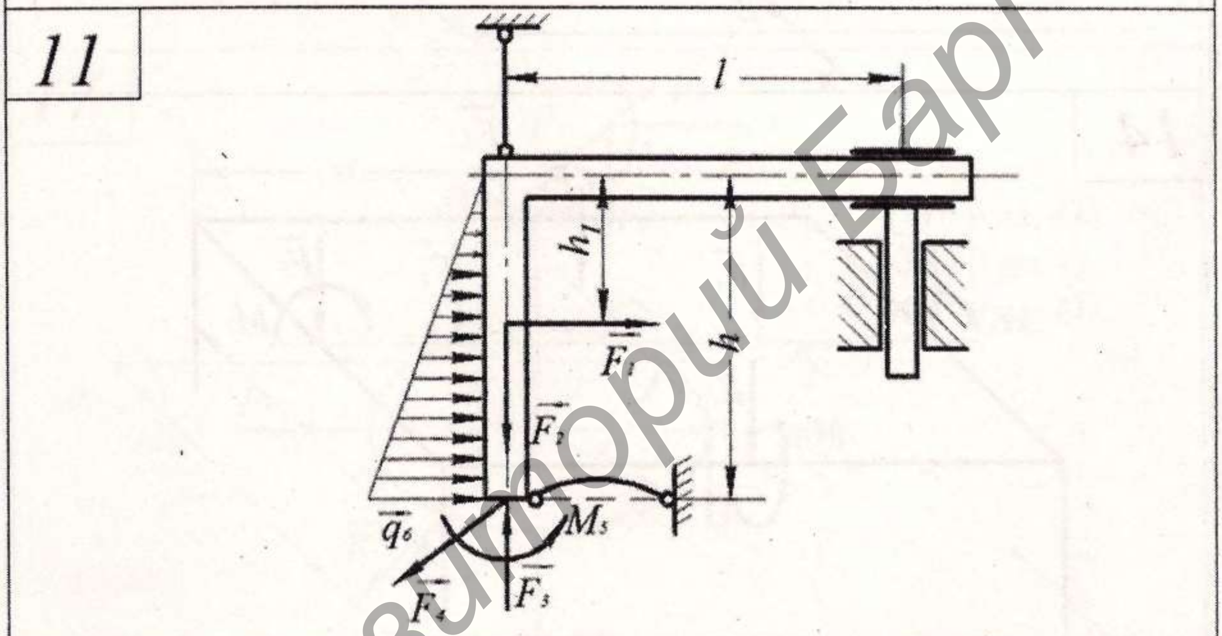


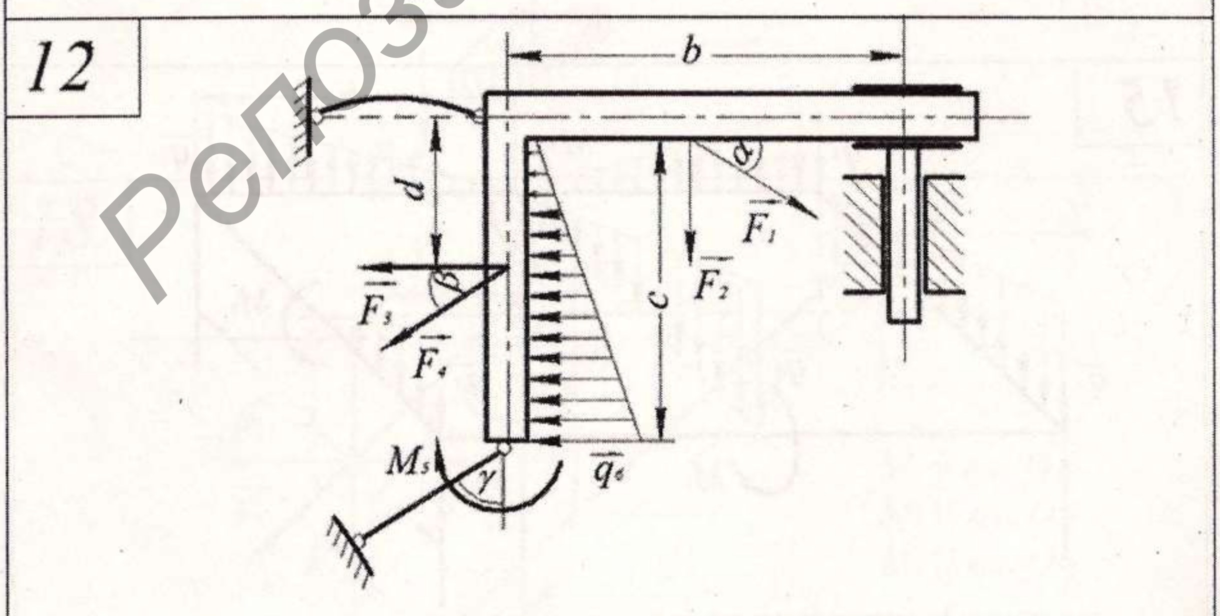
Рысунак А.1 — Працяг



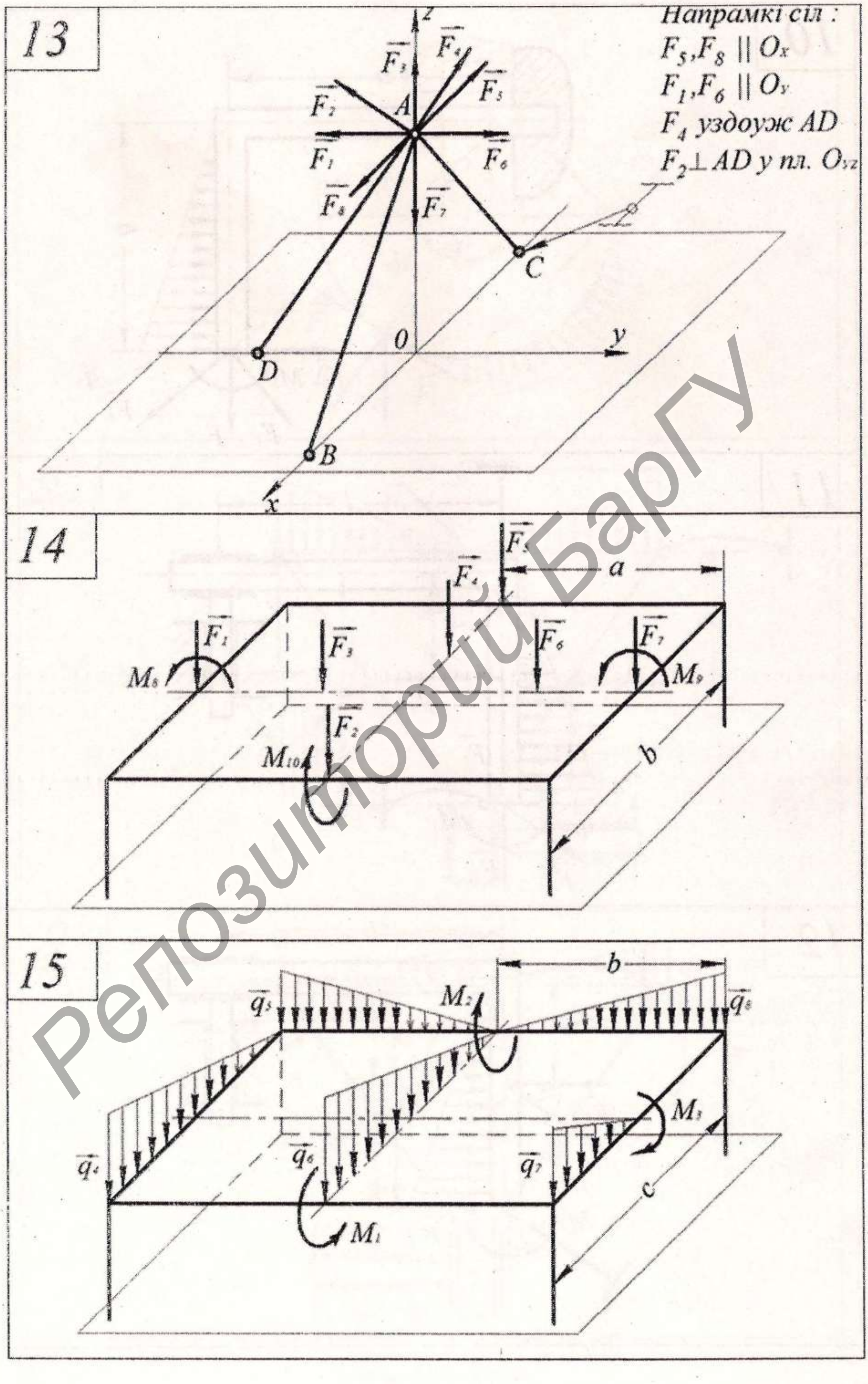
Рысунак А.1 — Працяг



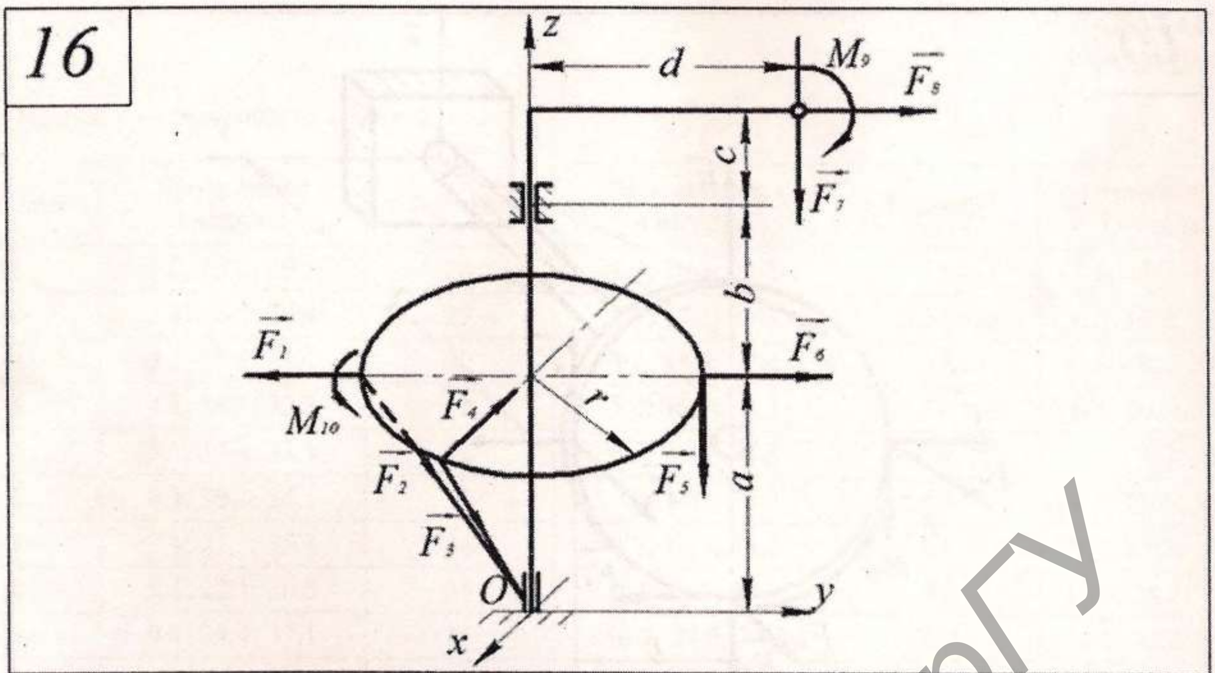


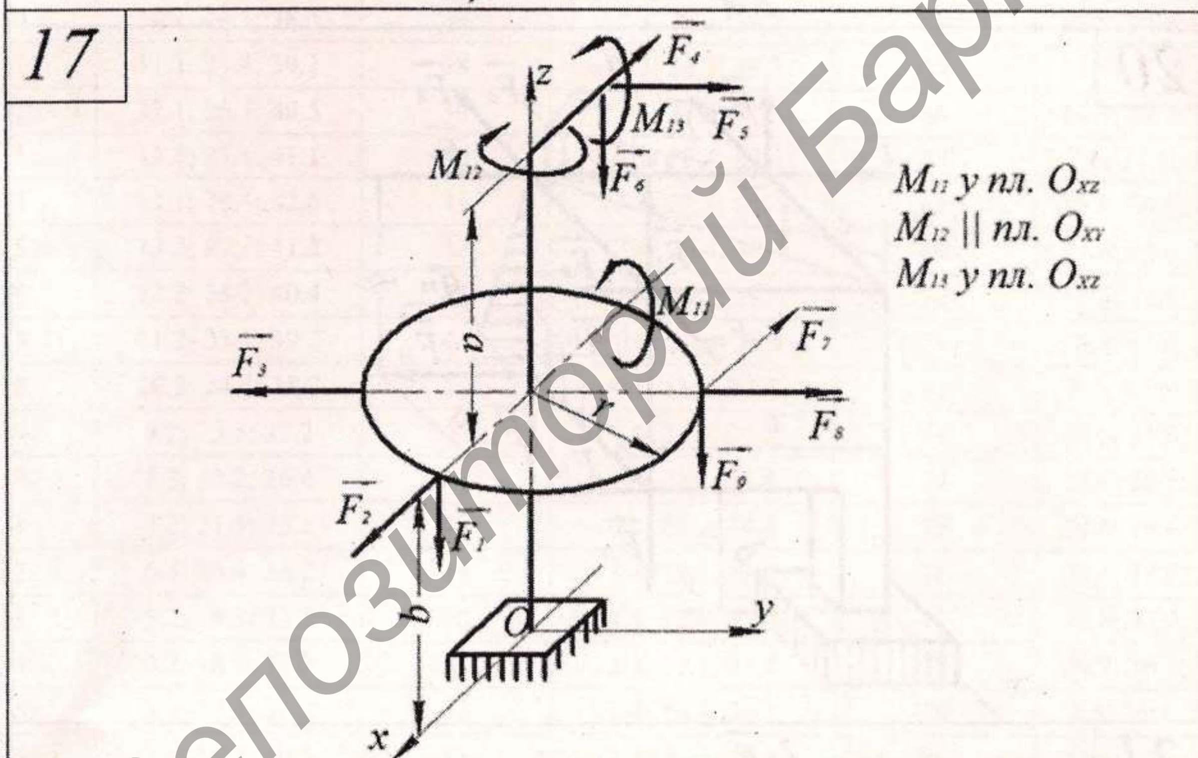


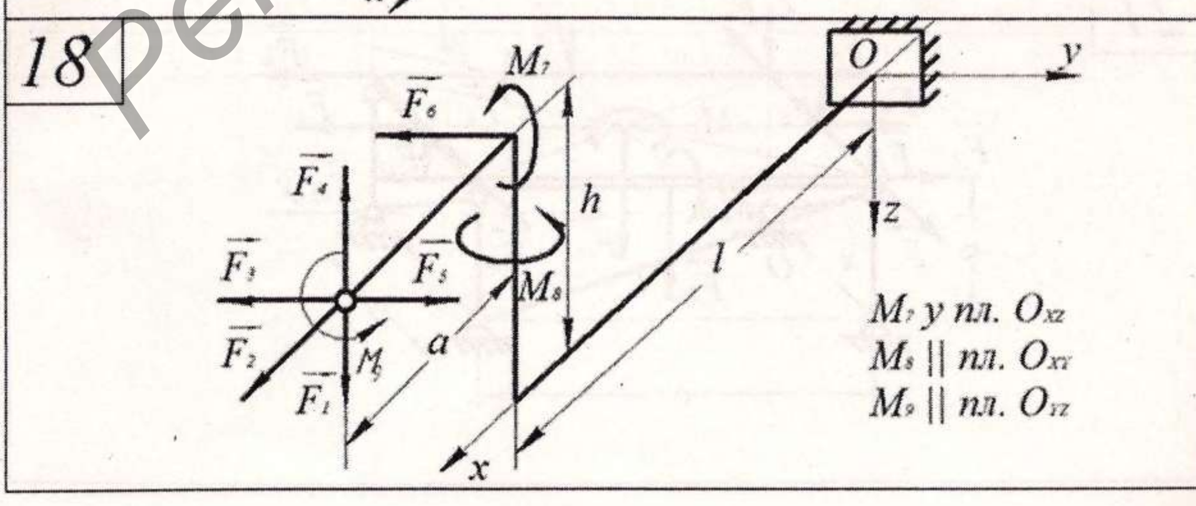
Рысунак А.1 — Працяг



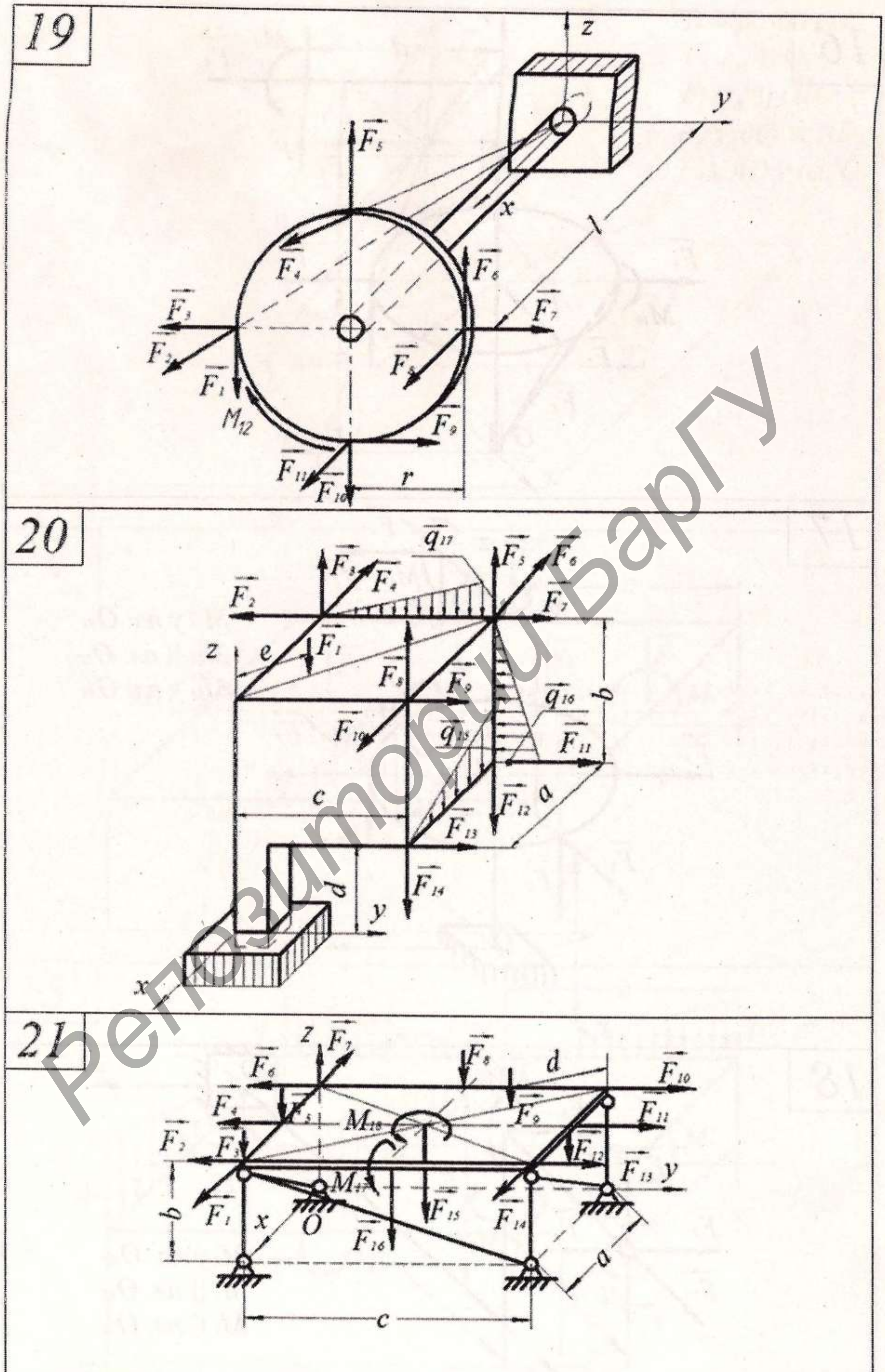
Рысунак А.1 — Працяг







Рысунак А.1 — Працяг



Рысунак А.1 — Заканчэнне

ДАДАТАК Б
(абавязковы)

Т а б л і ц а Б.1 — Варыянты да задання 2

Варыянт	Нумар схемы і нагрузкі	Варыянт	Нумар схемы і нагрузкі	Варыянт	Нумар схемы і нагрузкі
1	1.2; 15.4; 29.1	28	2.3; 16.1; 30.5	55	3.5; 17.2; 31.5
2	2.1; 16.3; 30.4	29	1.1; 17.3; 31.3	56	4.5; 18.2; 32.5
3	3.1; 17.4; 31.1	30	4.3; 18.3; 32.3	57	5.5; 19.2; 33.5
4	4.1; 18.1; 32.5	31	5.3; 19.3; 33.3	58	6.5; 20.5; 34.1
5	5.1; 19.4; 33.1	32	6.2; 20.3; 34.3	59	7.5; 21.2; 35.5
6	6.1; 20.1; 34.5	33	7.3; 21.3; 35.3	60	8.5; 22.5; 36.4
7	7.1; 21.4; 35.1	34	8.3; 22.3; 36.3	61	9.5; 23.2; 37.5
8	8.1; 22.1; 36.5	35	9.3; 23.5; 37.3	62	10.5; 24.2; 38.5
9	9.1; 23.4; 37.1	36	10.3; 24.3; 38.3	63	11.5; 25.2; 39.5
10	10.1; 24.1; 38.5	37	11.3; 25.3; 39.3	64	12.5; 26.5; 40.1
11	11.1; 25.4; 39.1	38	12.2; 26.3; 40.3	65	13.5; 27.2; 41.5
12	12.1; 26.1; 40.5	39	13.3; 27.7; 41.3	66	14.3; 28.3; 42.3
13	13.1; 27.6; 41.1	40	14.2; 28.4; 42.2	67	7.6; 27.1; 41.6
14	14.1; 28.1; 42.6	41	13.4; 27.1; 41.4	68	15.6; 26.6; 40.6
15	13.2; 27.5; 41.2	42	12.4; 26.4; 40.2	69	11.6; 25.6; 39.6
16	12.2; 26.2; 40.4	43	11.4; 25.1; 39.4	70	15.5; 24.6; 38.6
17	11.2; 25.5; 39.2	44	10.4; 24.4; 38.4	71	26.8; 23.6; 37.6
18	10.2; 24.5; 38.2	45	9.4; 23.1; 37.4	72	8.6; 22.6; 36.6
19	9.2; 23.5; 37.2	46	8.4; 22.4; 36.2	73	28.5; 21.6; 35.6
20	8.2; 22.2; 36.4	47	7.4; 21.1; 35.4	74	28.6; 20.6; 34.6
21	7.2; 21.5; 35.2	48	6.4; 20.2; 34.4	75	29.6; 19.6; 33.6
22	6.3; 20.4; 34.2	49	5.4; 19.1; 33.4	76	29.5; 18.6; 32.6
23	5.2; 19.5; 33.2	50	4.4; 18.4; 32.4	77	30.8; 32.7; 31.6
24	4.2; 18.5; 32.2	51	3.4; 17.1; 31.4	78	29.7; 16.6; 30.6
25	3.2; 17.5; 31.2	52	2.4; 16.4; 30.1	79	1.5; 15.1; 29.2
26	2.2; 16.2; 30.5	53	1.4; 15.3; 29.3	80	42.5; 42.1; 30.7
27	1.3; 15.2; 29.4	54	2.5; 16.5; 30.2	81	35.7; 36.7; 42.4

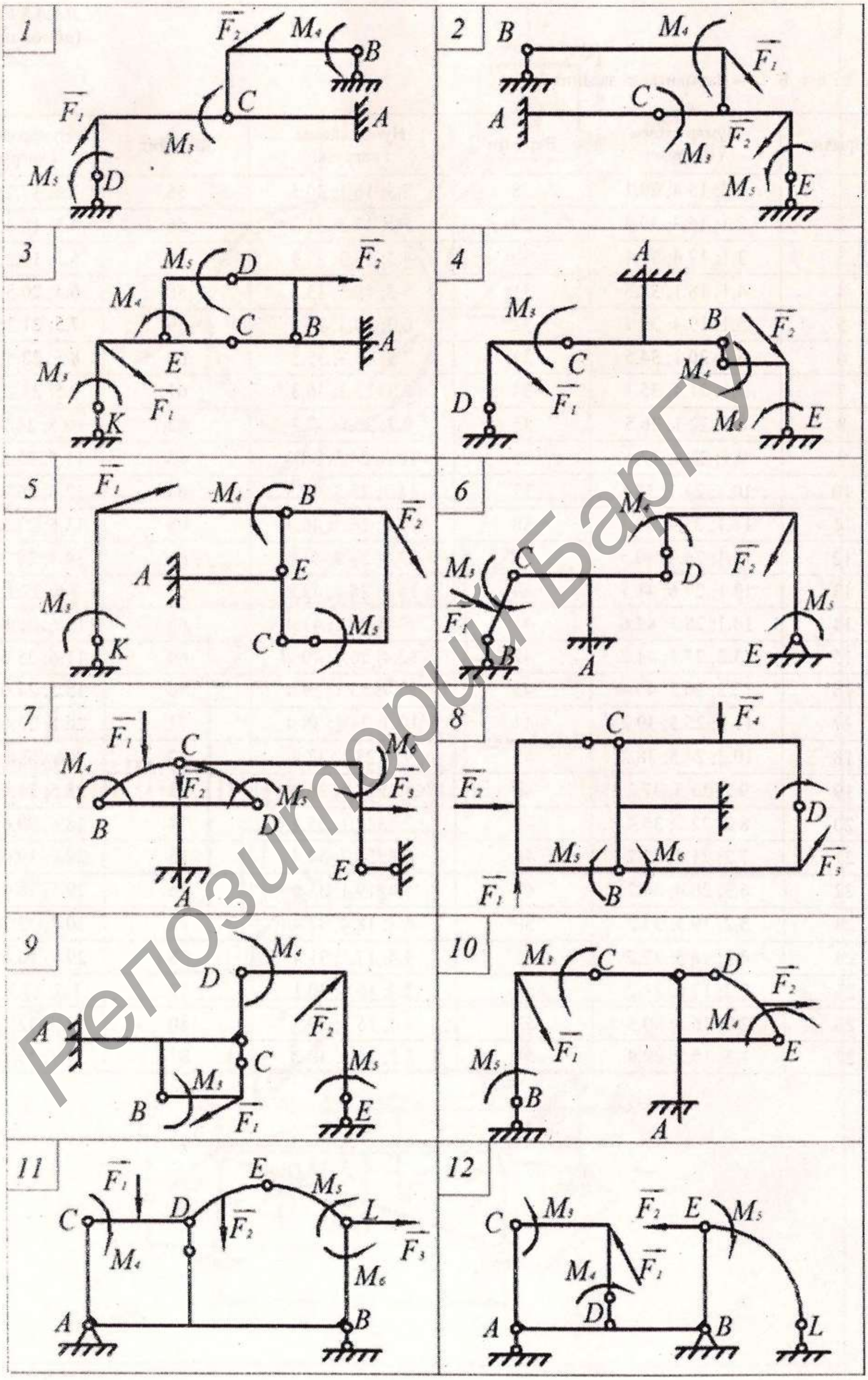
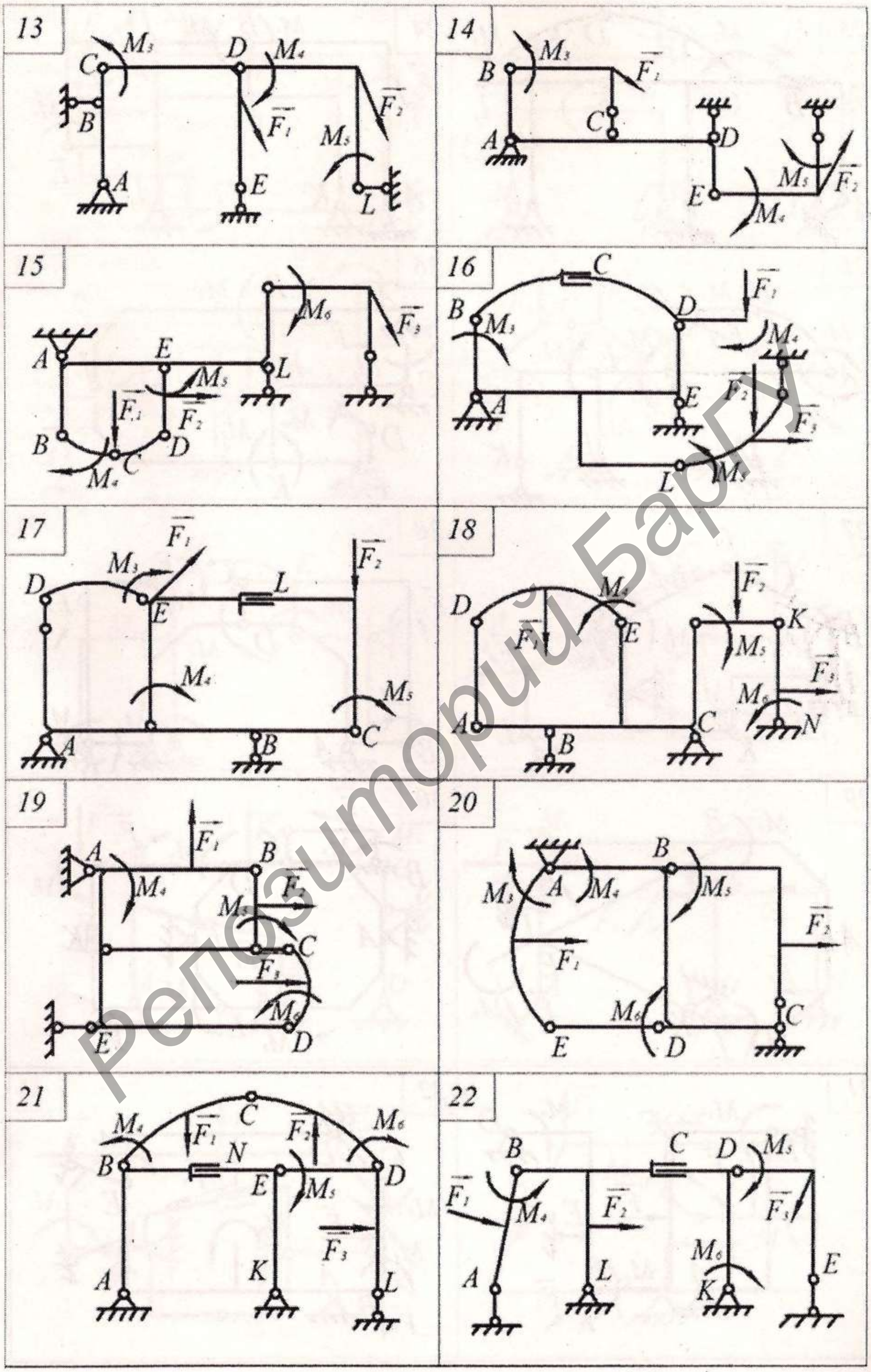
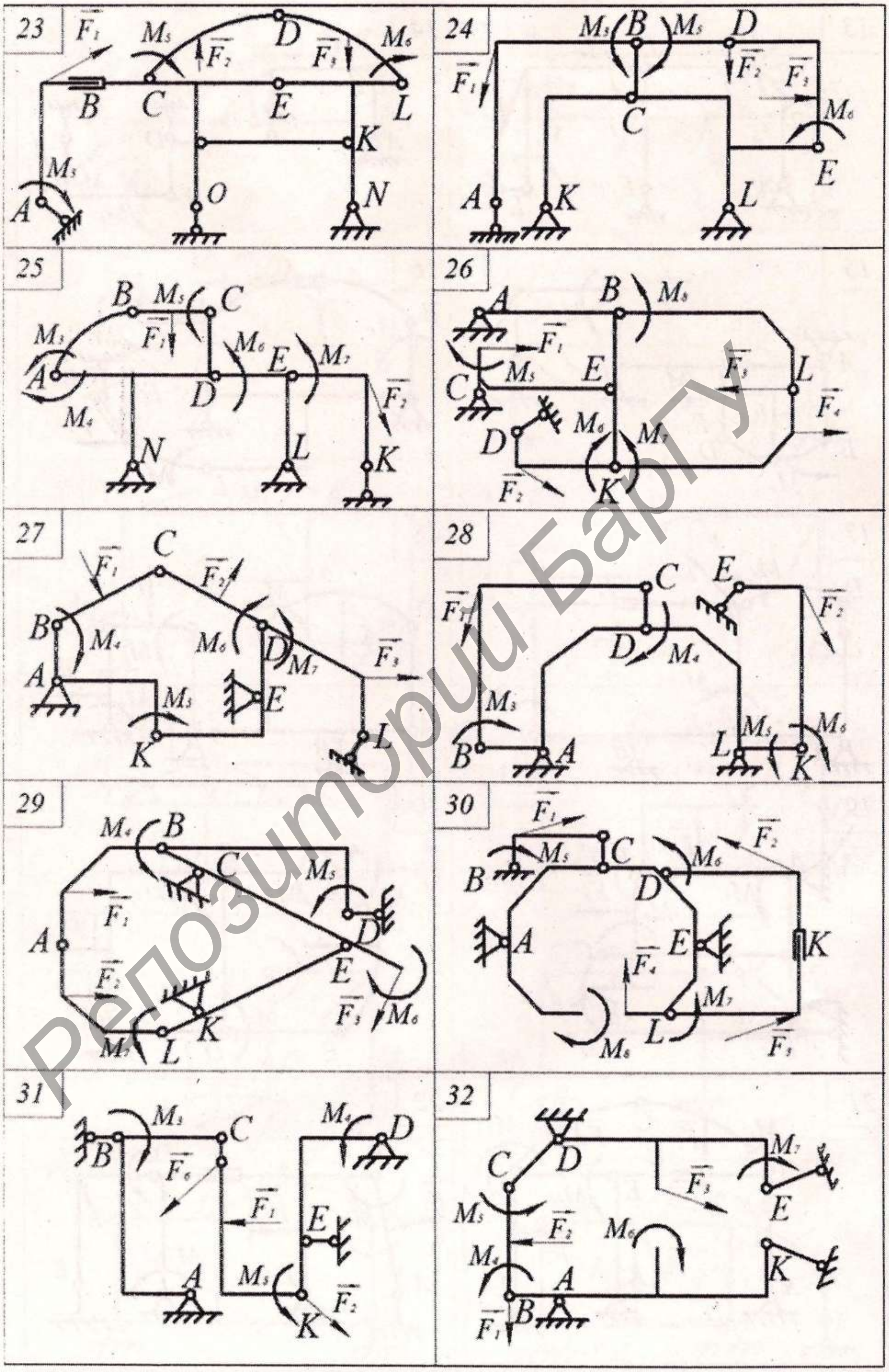


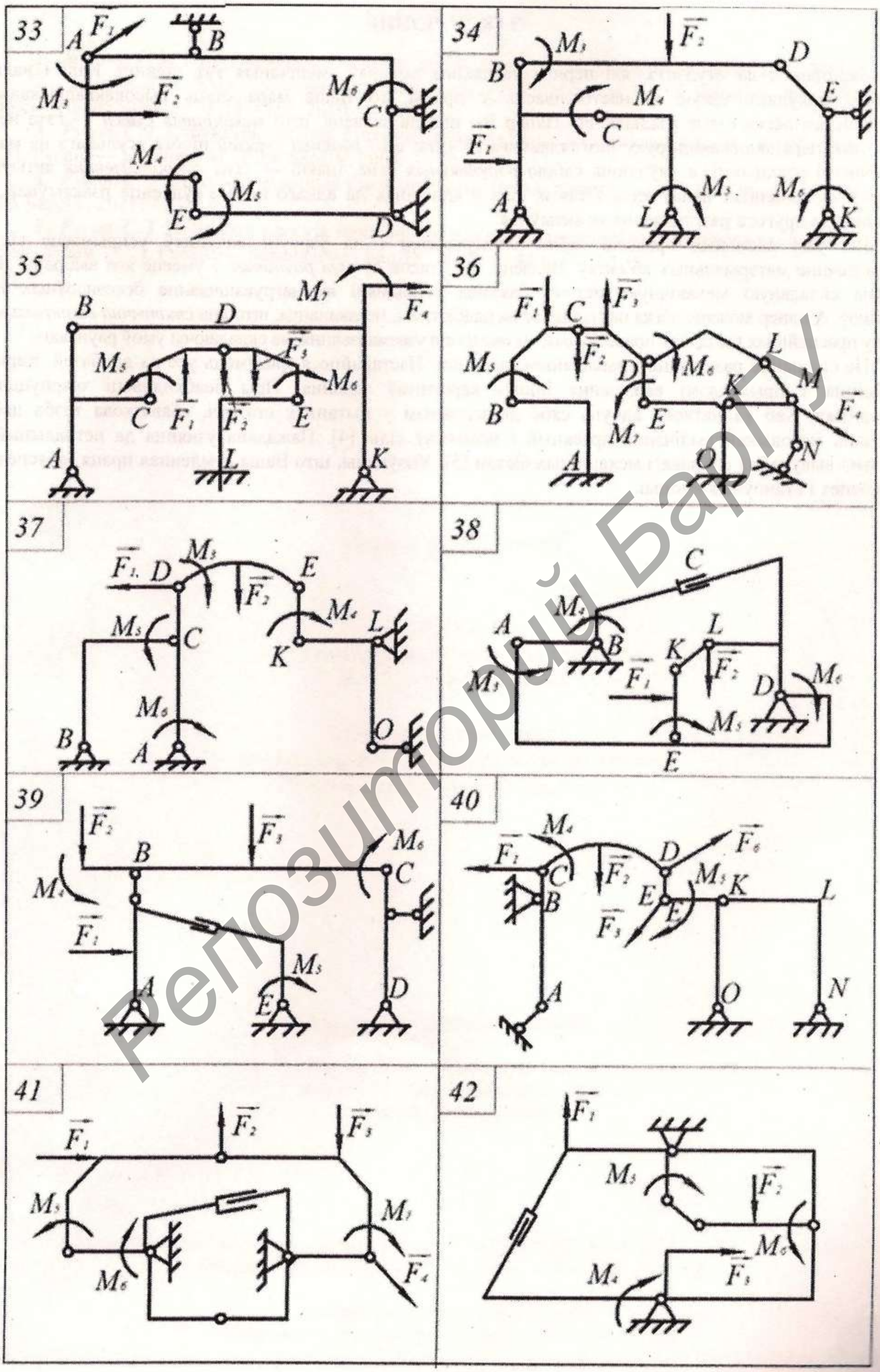
Рисунок Б.1 — Схемы да задання 2



Рысунак Б.1 — Працяг



Рисунак Б.1 — Працяг



Рысунак Б.1 — Заканчэнне

ЗАКЛЮЧЭННЕ

Звяртаемся да студэнта, які першы паспяхова выканаў змешчаныя тут заданні. Калі і надалеі будзеце праяўляць такую ж настойлівасць у працы, то Ваша мара стаць высокакваліфікаваным спецыялістам лёгка стане рэальнасцю. Цяпер Вы цвёрда ведаеце, што *механічныя сувязі* — гэта нейкі. целы, што перашкаджаюць руху разглядаемага аб'екта; што *рэакцыі сувязей* нічога агульнага не маюц з хімічнымі рэакцыямі, а ўяўляюць сабою *рэактыўныя сілы*, інакш — *сілы супрацьдзеяння* актыўным сілам. У сучляненнях целаў адна і тая ж сіла ў адносінах да аднаго цела з'яўляецца рэактыўнай, а ў адносінах да другога разглядаецца як актыўная.

Вы ўжо здольныя правесці *уяўны эксперымент* і на ўзроўні пачуццяў успрымаеце сілавое ўзаемадзеянне матэрыяльных аб'ектаў. Ведаеце, што такое *аб'ект раўнавагі*, і ўмееце яго выбраць. Яшчэ нядаўна складаную механічную сістэму баязліва ўспрымалі як нагрувашчванне бессэнсоўных ліній і кружкоў. А цяпер можаце лёгка падзяліць яе на падсістэмы, пераканацца, што яна *статычна вызначальная*, нават у прасцейшых выпадках правесці *якасны аналіз* сіл узаемадзеяння, не складаючы ўмоў раўнавагі.

Не спяшайце развітацца з выкананым заданнем. Пастарайцеся зразумець усё да дробязей. Карысна азнаёміцца з прыкладамі выканання іншых варыянтаў задання. Пры неабходнасці звярнуцца да выкладчыка. Каб канчаткова адчуць сябе дасведчаным у пытаннях статыкі, абавязкова трэба цвёрда авалодаць методыкай вылічэння праекцый і момантаў сілы [4]. Пажадана ўзняцца да нетрадыцыйнай методыкі вывучэння раўнавагі механічных сістэм [5]. Упэўнены, што Ваша сумленная праца забяспечыць Вам поспех і станоўчыя эмоцыі.

СПІС КРЫНІЦ

1. *Хвясько, Г. М.* Курс тэарэтычнай механікі : вучэб. дапам. / Г. М. Хвясько. — Мінск : БДУ, 2000. — 354 с.
2. *Чигарев, А. В.* Курс теоретической механики : учеб. пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. — Минск : Новое знание ; М. : ЦУПЛ, 2010. — 398 с.
3. *Русан, С. І.* Структура плоскіх статычна вызначальных механічных сістэм : вучэб.-метад. дапам. / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2007. — 70, [1] с.
4. *Русан, С. І.* Статыка: праекцыя і момант сілы : метад. рэкамендацыі / С. І. Русан. — Баранавічы : РВА БарДУ, 2011. — 70, [6] с.
5. *Русан, С. І.* Раўнавага плоскіх механічных сістэм (нетрадыцыйная методыка вывучэння) : вучэб.-метад. дапам. / С. І. Русан. — Баранавічы : БарДУ, 2005. — 44 с.

+0

Вучэбнае выданне

Русан Сяргей Іванавіч

СТАТЫКА.
ЯКАСНЫ АНАЛІЗ РАЎНАВАГІ МЕХАНІЧНЫХ СІСТЭМ

Практычны дапаможнік
для студэнтаў інжынерных спецыяльнасцей
устаноў вышэйшай адукацыі

Адказны за выпуск С. А. Беразнюк

Тэхнічны рэдактар Г. Ю. Сідарэнка
Камп'ютарная вёрстка С. М. Глушак
Карэктар Н. М. Каладко

Падпісана ў друк 11.09.2017. Фармат 60 × 84 1/8. Папера газетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.
Ум. друк. арк. 7,00. Ул.-выд. арк. 4,70. Тыраж 45 экз. Заказ 568.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:
установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў
№ 1/424 ад 09.09.2016.
Вул. Войкава, 21, 225404 г. Баранавічы. Тэл. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .