

Для этого в компьютерном коде запрограммированы такие функции, как вычисление факториала, произведение двух матриц; тензорное произведение двух матриц; тензорное возведение матрицы в степень; вычисление следа матрицы и числа сочетаний. Для подсчёта суммы используется понятие цикла.

Для построения вспомогательной матрицы $D^{(m)}$ и определения чётности перестановки наборов индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ используется подсчёт числа инверсий в соответствующем наборе, при этом основная трудность заключается в большой размерности данной матрицы.

С клавиатуры в консольном приложении вводится размерность исходных матриц и их элементы.

Работа с матрицами ведётся, как работа с динамическими двумерными массивами. Использование динамической памяти обусловлено тем, что данные вычисления даже для матриц размерности 2×2 либо 3×3 будут занимать много памяти, поэтому есть смысл выделять память вначале программы и удалять её после выполнения.

Отметим, что программа написана таким образом, что возможен вывод на экран промежуточных данных и вычислений, а не только конечного результата. Стандартные функции нахождения суммы матриц и вычисления определителя можно использовать для проверки полученного результата.

Что касается нахождения определителя семейства матриц (2) и получения коэффициентов его разложения по степеням ε , то соответствующую формулу можно получить путём подстановки в формулу (4) вместо матрицы H суммы $(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon^3 A_3 + \dots)$ и выполнения необходимых вычислений. Работа в данном направлении ведётся в настоящее время.

Заключение. Предложенная программа позволяет облегчить вычисление определителя суммы двух (или более) матриц, что особенно важно при рассмотрении не числовых матриц, а матричных семейств, зависящих от малого параметра ε .

В будущем планируется написание программы для нахождения элементов присоединённой матрицы $D^\#(\varepsilon)$, которые представляют собой алгебраические дополнения (по сути определители) к соответствующим элементам матрицы $D(\varepsilon)$, что позволит строить асимптотическое разложение семейства обратных матриц $D^{-1}(\varepsilon)$ или находить его предел (3) в явном виде.

Список цитируемых источников

1. Борухов, В. Т. Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем / В. Т. Борухов // Автоматика и телемеханика. АН СССР. — Б. м. : [б. и.], 1978. — № 11. — С. 5—11.
2. Антонец, А. Б. Об аппроксимационном подходе к исследованию уравнений с обобщёнными коэффициентами : сб. тр. / А. Б. Антонец // Нелинейный анализ и приложения, Ин-та математики НАН Беларуси. — 1998. — Т. 1. — С. 3—11.
3. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Наука, 1978. — 302 с.

Материал поступил в редакцию 25.02.2015 г.

УДК 514.765+512.714

Ю. В. Сергеева, Р. В. Галабурда

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОДАЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{h}$ КАНОНИЧЕСКОГО РЕДУКТИВНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(n)$ ГРУППЫ ЛИ $G=SO(N)$

Введение. Важнейшими примерами однородных пространств являются *симметрические пространства*, в число которых входят классические евклидовы и псевдоевклидовы пространства, n -мерные сферы, плоскость и пространство Лобачевского. С конца 1960-х гг. значительную роль стали играть *однородные Φ -пространства G/H* , которые порождаются автоморфизмами Φ группы Ли G . Если автоморфизм Φ имеет конечный порядок ($\Phi^k = id$), то G/H называют *однородным Φ -пространством порядка k* (в иной терминологии, *однородным k -симметрическим пространством*). В данной работе решается задача нахождения подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ канонического редуктивного разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(n)$ на специальной серии римановых однородных b -симметрических пространств вещественной ортогональной группы $SO(n)$, $n \geq 5$.

Основная часть. Введём основные определения теории групп Ли.

Определение 1. Множество $G \neq \emptyset$ называется *группой Ли*, если

- 1) G — гладкое многообразие;
- 2) G — группа (операция умножения или сложения);

3) отображение $\mu: G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \rightarrow a \cdot b^{-1}$ — гладкое отображение или $(a, b) \rightarrow a + (-b)$ — гладкое отображение [1; 2].

Определение 2. Пусть L — векторное пространство над полем P . L называется алгеброй Ли, если задано отображение

$$[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L, (x, y) \rightarrow [x, y],$$

которое называется *скобкой Ли* или *коммутатором векторов x и y* , удовлетворяющее условиям:

- 1) билинейность;
- 2) антикоммутативность: $[x, y] = -[y, x]$;
- 3) тождество Якоби: $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \quad \forall x, y, z \in L$ [1; 2].

Рассмотрим классическую группу Ли $GL(n, R)$ — множество обратимых матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами (является группой с операцией умножения матриц, единичный элемент — это единичная матрица E , а обратной является обычная обратная матрица). Она называется *полной линейной группой*.

Для неё справедлива: **Теорема 1.** Алгеброй Ли группы Ли $GL(n, R)$ является алгебра Ли $gl(n, R) = Mat(n, R)$ (все квадратные матрицы). В качестве скобки Ли берётся коммутатор матриц: $[A, B] = AB - BA$ [2].

Далее приведём одно из основных определений теории Φ -пространств. Такие пространства возникли впервые в 1960 г. в работах В. И. Ведерникова. Изучались в дальнейшем: Н. А. Степановым, J. A. Wolf (Жозеф Вольф, США), A. Gray (Альфред Грей, США), A. Ledger (Артур Леджер, Англия), A. С. Феденко (Анатолий Семёнович), O. Kowalski (Олджих Ковальский, Чехия) и др.

В частных случаях: 1) если $\Phi^2 = id \Rightarrow G/H$ — однородное симметрическое Φ -пространство; 2) пусть автоморфизм Φ имеет конечный порядок, т. е. $\exists k \in \mathbb{N}: \Phi^k = id$. Тогда однородное Φ -пространство G/H называется *однородным Φ -пространством порядка k (однородным k -симметрическим пространством)*

Определение 3. Пусть Φ — автоморфизм связной группы Ли G , G^Φ — подгруппа неподвижных точек автоморфизма Φ , т. е. $G^\Phi = \{g \in G | \Phi(g) = g\}$, которая является замкнутой подгруппой в G , G_o^Φ — компонента единицы группы G^Φ . Фактор-пространство G/H называется *однородным Φ -пространством*, если замкнутая подгруппа H в G удовлетворяет условию: $G_o^\Phi \subset H \subset G^\Phi$ [5; 6].

Для каждого k -симметрического пространства существует каноническое редуктивное разложение алгебры Ли g группы Ли G : $g = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h} = \{X \in g | \varphi(X) = X\}$ — подалгебра Ли подгруппы Ли H , $\varphi = d\Phi_e: g \rightarrow g$ — автоморфизм алгебры Ли g , $\mathfrak{m} = Ag$, где $A = \varphi - id$ — оператор в g .

Рассмотрим группу Ли $G = SO(n)$, $\Phi: g \rightarrow BgB^{-1}$ — внутренний автоморфизм, где $B = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -E_l \end{pmatrix}$, $m \geq 1, l \geq 1, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n = m + l + 3$, т. е. $S^3 = E_3$, $S^2 = S^{-1}$, $S' = S^{-1}$.

В итоге $\Phi^6(g) = B^6 g (B^{-1})^6 = E_n g E_n = g$, т. е. $\Phi^6 = id \Rightarrow$ получаем Φ -пространство порядка 6.

Представим алгебру Ли g в виде $g = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 & X_4 & X_5 \\ -X_4' & X_2 & X_6 \\ -X_5' & -X_6' & X_3 \end{pmatrix} \right\}$,

где X_1, X_2, X_3 — кососимметрические матрицы (соответствующих размеров) ($A' = -A$, т. е. на главной диагонали нули, всё, что выше отражается вниз с противоположным знаком);

X_4, X_5, X_6 — произвольные матрицы.

Вычислим подалгебру Ли $\mathfrak{h}$ неподвижных векторов автоморфизма $\varphi = d\Phi_e$; $\varphi(X) = BXB^{-1} \Rightarrow BX = XB$.

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_4 & X_5 \\ -X_4^t & X_2 & X_6 \\ -X_5^t & -X_6^t & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_4 & X_5 \\ -X_4^t & X_2 & X_6 \\ -X_5^t & -X_6^t & X_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_4 S & -X_5 \\ -X_4^t & X_2 S & -X_6 \\ -X_5^t & -X_6^t S & -X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_4 & X_5 \\ -S X_4^t & S X_2 & S X_6 \\ X_5^t & X_6^t & -X_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_4 S = X_4, \\ -X_5 = X_5, \\ X_4^t = S X_4^t, \\ X_2 S = S X_2, \\ -X_6 = S X_6, \\ -X_6^t S = X_6^t. \end{cases} \quad (1)$$

Решив систему матричных уравнений (1), получаем, что подалгебра $\mathfrak{h}$ имеет вид:

$$\mathfrak{h} = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 & X_4 & 0 \\ -X_4^t & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} X_1, X_3 - \text{произв. кососимметрические,} \\ X_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m & x_m & x_m \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \right\}.$$

Заключение. Данная работа может найти применение в различных сферах производства и технологий, где используются знания линейной и дифференциальной геометрии и топологии. Также теория групп Ли уже активно используется при изучении основной теории молекулярной физики. Материал стоит включить в учебные пособия. Несмотря на довольно узкую специализацию темы, данные расчёты и теоремы очень важны для многих исследований и сфер производства.

Список цитируемых источников

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981. — Т. 2. — 416 с.
2. Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Ф. Уорнер. — М. : Мир, 1987. — 302 с.
3. Вольф, Дж. Пространства постоянной кривизны / Дж. Вольф. — М. : Мир, 1982. — 480 с.
4. Винберг, Э. Б. Линейные представления групп / Э. Б. Винберг. — М. : Наука, 1985. — 144 с.
5. Балащенко, В. В. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах / В. В. Балащенко, Н. А. Степанов // Математ. сб. — Б. м. : [б. и.], 1995. — Т. 186. — № 11. — С. 3—34.
6. Однородные пространства: теория и приложения: монография / В. В. Балащенко [и др.]. — Ханты-Мансийск : Полиграфист, 2008. — 208 с.

Материал поступил в редакцию 25.02.2015 г.

УДК 551.521.32

Е. С. Стецкий, Г. В. Качкар

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕМЛИ

Введение. Инфракрасное излучение — электромагнитное излучение, занимающее спектральную область между красным концом видимого света ($\lambda = 0,74$ мкм и $\nu = 430$ ТГц) и микроволновым радиоизлучением ($\lambda = 1 - 2$ мм и $\nu = 300$ ГГц). Оно было открыто в 1800 г. английским астрономом Вильямом Гершелем, который, проводя измерения энергии различных лучей видимого света, случайно обнаружил, что используемые им термометры нагреваются и за границей красного конца спектра. Учёный сделал вывод, что существуют некоторые лучи, продолжающие спектр за красным светом. Это положило начало изучению инфракрасного излучения. Установлено, что его испускают возбуждённые атомы или ионы. Источниками инфракрасного излучения являются лампы накаливания, различные излучатели, газоразрядные источники света, но самым дешёвым и естественным источником является Земля. *Инфракрасное излучение Земли* состоит из двух составляющих: собственного теплового и отражённого солнечного излучения.