

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ. ОБЕСПЕЧЕНИЕ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ИНЖЕНЕРНОГО ПРОФИЛЯ

УДК 517.537.36+517.542

И. Н. Бруй

Учреждение образования «Барановичский государственный университет», Барановичи, Республика Беларусь

О СВЕРХСХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЕЙ С ГРАНИЦЕЙ С. Я. АЛЬНЕРА И С ГРАНИЦЕЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВРАЩЕНИЯ

1. Понятие сверхсходимости рядов Тейлора. Для степенного ряда

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{\alpha} z^m \quad (1)$$

в случае вещественного параметра $-\infty < \alpha < +\infty$ обычный предел $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{m^{\alpha}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(m^{\frac{1}{m}}\right)^{\alpha} =$

$= \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{\frac{1}{m}}\right)^{\alpha} = 1^{\alpha} = 1$. Поэтому множество всех точек его расходимости при любом значении веществен-

ного параметра $-\infty < \alpha < +\infty$ всегда содержит внешность $|z| > 1$ единичной окружности $|z| = 1$. 1) В случае вещественного параметра $0 \leq \alpha < +\infty$ множество всех точек сходимости степенного ряда (1) равно единичному кругу $|z| < 1$, так как во всех точках единичной окружности $|z| = 1$ не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда: модуль общего члена $|m^{\alpha} z^m| = m^{\alpha}$ не стремится к нулю при $m \rightarrow +\infty$.

2) В случае вещественного параметра $-\infty < \alpha < -1$ множество всех точек сходимости степенного ряда (1) равно замкнутому единичному кругу $|z| \leq 1$, так как во всех точках единичной окружности $|z| = 1$ ряд абсолютно сходится в силу интегрального критерия сходимости вещественных рядов. 3) В случае вещественного параметра $-1 \leq \alpha < 0$ множество всех точек сходимости степенного ряда (1) равно замкнутому единичному кругу $|z| \leq 1$ без одной точки $z = 1$, так как он расходится в точке $z = 1$ и сходится в остальных точках единичной окружности $|z| = 1$ согласно признаку Абеля—Дирихле.

Термин «сверхсходимость ряда Тейлора» употребляют, когда существует некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда, которая сходится и в точках вне множество всех точек его сходимости.

По формуле бинома Ньютона для любого натурального $p \in Z_1 := \{1, 2, 3, \dots\}$ степень $[z(1-z)]^{4^p} =$

$$= z^{4^p} \sum_{m=0}^{4^p} \frac{(4^p)!}{m!(4^p-m)!} (-z)^m 1^{4^p-m} = \sum_{m=0}^{4^p} (-1)^m \frac{(4^p)!}{m!(4^p-m)!} z^{4^p+m}.$$

Отсюда видно, что у последнего алгебраического многочлена наименьший и наибольший показатели степени аргумента z соответственно равны 4^p и $2 \cdot 4^p$, а наибольший коэффициент при степени аргумента z равен единственному наибольшему биноми-

альному коэффициенту $C_{4^p}^{\frac{1}{2} \cdot 4^p}$ при фиксированном чётном нижнем индексе 4^p : $\frac{(4^p)!}{\left(\frac{1}{2} \cdot 4^p\right)! \left(4^p - \frac{1}{2} \cdot 4^p\right)!} =$

$= \frac{(4^p)!}{\left[(2^{2p-1})!\right]^2}$. Если функциональный ряд из алгебраических многочленов

$$f(z) := \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{[(2^{2p-1})!]^2}{(4^p)!} [z(1-z)]^{4^p} \quad (2)$$

записать в порядке возрастания показателей степеней аргумента z , то получим лакунарный степенной ряд (\Leftrightarrow степенной ряд с пропусками)

$$f(z) = \sum_{m=4}^{+\infty} a_m z^m, \quad (3)$$

в котором коэффициенты a_m с номерами $2 \cdot 4^p + 1 \leq m \leq 4 \cdot 4^p - 1$ равны нулю, модули всех коэффициентов $|a_m| \leq 1$ и для счётного множества номеров $m = 2^{2p-1}$ коэффициенты a_m равны единице. Тогда верхний предел $\limsup_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1$ и по теореме Коши—Адамара степенной ряд (3) сходится внутри единичной окружности $|z| = 1$ и расходится вне неё. Как известно, степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы f , т. е. $\forall m \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\} \quad a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!} =: a_m(f)$.

Операторы присваивания « $:=$ » и « \equiv » означают, что выражению, которое стоит со стороны знака равенства « $=$ », присвоено обозначение, которое стоит со стороны знака двоеточия « $:$ ».

При подстановке $z =: 1 - w$ в (2) получаем ряд

$$g(w) := \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{[(2^{2p-1})!]^2}{(4^p)!} [(1-w)w]^{4^p} = \sum_{m=4}^{+\infty} a_m w^m, \quad (4)$$

который в силу сказанного в предыдущем абзаце сходится внутри единичной окружности $|w| = 1$.

Частичная сумма $s_{2 \cdot 4^p} f(z) := \sum_{m=4}^{2 \cdot 4^p} a_m z^m = \sum_{m=1}^p \frac{[(2^{2m-1})!]^2}{(4^m)!} [z(1-z)]^{4^m}$ ряда Тейлора (3) совпадает с частичной суммой $s_{2 \cdot 4^p} g(w) := \sum_{m=4}^{2 \cdot 4^p} a_m w^m = \sum_{m=1}^p \frac{[(2^{2m-1})!]^2}{(4^m)!} [(1-w)w]^{4^m}$ ряда Тейлора (4), вычисленной при $w = 1 - z$.

Стало быть, подпоследовательность $(s_{2 \cdot 4^p} f(z))_{p=1}^{+\infty}$ частичных сумм ряда Тейлора (3) сходится в объединении кругов $|z| < 1$ и $|1-z| < 1$, т. е. сходится в области, лежащей частично вне единичной окружности $|z| = 1$, являющейся границей круга сходимости ряда Тейлора (3).

Как указывалось выше, ряд Тейлора, который обладает подпоследовательностью частичных сумм, сходящейся и вне множество всех точек его сходимости, называют сверхсходящимся (\Leftrightarrow гиперсходящимся [1, с. 344]); английский термин “overconvergence”, немецкие термины „die Überkonvergenz, das Überkonvergenzverhalten“. Сразу же укажем, что Дж. Л. Уолш термин “overconvergence” употребляет в ином смысле [2, с. 103].

Сверхсходимость рядов Тейлора обнаружили на примерах Портер [3] и Иенч [4]. Основоположителем теории сверхсходимости рядов Тейлора обоснованно считается этнический украинец А. Островский, который установил глубокую связь между явлением сверхсходимости рядов Тейлора и наличием нулевых коэффициентов у ряда Тейлора.

Пусть ряд Тейлора функции f с верхним пределом $\limsup_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{|a_m(f)|} = 1$ имеет счётное множество нулевых коэффициентов Тейлора. И пусть N_p и $N_{p'}$ суть индексы членов, соответственно предшествующих отрезку ряда Тейлора с нулевыми коэффициентами Тейлора и следующих непосредственно за им: $\dots + a_{N_p}(f)z^{N_p} + 0 \cdot z^{N_p+1} + 0 \cdot z^{N_p+2} + \dots + 0 \cdot z^{N_{p'}-2} + 0 \cdot z^{N_{p'}-1} + a_{N_{p'}}(f)z^{N_{p'}} + \dots$.

Разность $N_{p'} - N_p$ назовём шириной пропуска, а частное $(N_{p'} - N_p) / N_p$ назовём относительной шириной пропуска.

Теорема А. Островского [5, с. 557; 1, с. 345, теорема 1; 6, с. 138; 7, с. 12, теорема 1; 8, с. 7–8, теорема 2.1; 9, с. 15–16, 4]. *Если ряд Тейлора функции f с верхним пределом $\limsup_{m \rightarrow +\infty} \sqrt[m]{|a_m(f)|} = 1$ имеет счётное множество пропусков с относительной шириной пропусков, большей некоторого положи-*

тельного вещественного числа, то подпоследовательность $(s_{N_p} f(z))_{p=1}^{+\infty}$ частичных сумм ряда Тейлора функции f , заканчивающихся перед началом этих пропусков, сходится равномерно в достаточно малой окрестности любой точки единичной окружности $|z|=1$, в которой функция f аналитическая.

Для лакунарного ряда (3) относительная ширина пропусков $(4 \cdot 4^p - 2 \cdot 4^p) / 2 \cdot 4^p = 1$.

Обобщению рядов Б. Тейлора посвящена проблема К. Рунге [10] — Д. Гильберта [11] — П. Пенлеве [12]: с областью комплексной плоскости связать такую систему алгебраических многочленов, чтобы каждая функция, аналитическая в области и удовлетворяющая, быть может, некоторым дополнительным условиям на границе области, разлагалась в ряд по этой системе многочленов, который равномерно сходится внутри области.

В процессе решения вышеназванной проблемы последовательно появились: система многочленов Г. Фабера [13]; система Г. Сегё функций, ортонормированных по спрямляемому контуру ∂G жордановой области $G \subset C$ [14]; система С. Бохнера — Т. Карлемана функций, ортонормированных по площади открытого ограниченного множества $O \subset C$ [15; 16].

2. Ряды по многочленам Фабера. Пусть Γ_R есть спрямляемая жорданова кривая (rectifiable Jordan curve). Ниже соглашение $+\pi = \pi$ не распространяется на символы $+\infty$ и ∞ ; последние имеют у нас разный смысл. Вещественная прямая R пополняется двумя несобственными элементами: $-\infty$ (отрицательная бесконечность) и $+\infty$ (положительная бесконечность). Комплексная плоскость C пополняется единственным несобственным элементом ∞ (бесконечно удалённая точка).

Если функция $w = \Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z)$ конформно и однолистно отображает неограниченную внешность $\text{Ext} \Gamma_R$ спрямляемой жордановой кривой Γ_R в комплексной z -плоскости на неограниченную внешность $|w| > 1$ единичной окружности $|w|=1$ в комплексной w -плоскости с условием нормировки $0 < \lim_{z \rightarrow \infty} [\Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z) / z] < +\infty$, то $\Phi(\text{Ext} \Gamma_R, \infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z) = \infty$ и ряд Лорана функции $w = \Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z)$ в окрестности бесконечно удалённой точки $z = \infty$ имеет вид $w = \Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z) = \frac{z}{d} + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \dots$, где положительное вещественное число d равно трансфинитному диаметру компакта $\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R$. Для замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ трансфинитный диаметр $d = 1$.

По определению многочлен Фабера степени точно n есть многочленная часть лорановского разложения функции $[\Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z)]^n$ в окрестности бесконечно удалённой точки $z = \infty$:

$$\forall n \in Z_+ \quad F_n(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z) := \text{Polynomial} \left[\left(\frac{z}{d} + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \dots \right)^n \right]. \quad (5)$$

Очевидно, что многочлен Фабера 0-ой степени тождественно равен единице: $\forall z \in C \quad F_0(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z) = 1$. Из теории ортогональных рядов известно, что без тождественной единицы невозможно было бы равномерно приблизить функции, которые отличны от нуля при $z=0$ [17, с. 110].

Пусть $\mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)$ есть множество всех непрерывных на замкнутой жордановой области $\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R$ и аналитических в жордановой области $\text{Int} \Gamma_R$ функций с равномерной нормой $\|f(z)\|_{\mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)} := \max_{z \in \Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R} |f(z)| = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|$. Ясно, что последнее равенство записано на основании принципа максимума модуля аналитической функции [2, с. 15].

Если функцию, обратную к функции $w = \Phi(\text{Ext} \Gamma_R, z)$, обозначить через $z = \Psi(\text{Ext} \Gamma_R, w)$ ($\Psi := \Phi^{-1}$, $\Phi := \Psi^{-1}$, $\Psi(\text{Ext} \Gamma_R, \infty) = \infty$), то согласно теореме братьев Ф. и М. Рисс [1, с. 405, теорема 1, 1)] функция $z = \Psi(\text{Ext} \Gamma_R, w)$ абсолютно непрерывная на единичной окружности $|w|=1$.

Поэтому функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)$ сопоставляется следующий ряд по многочленам Фабера для замкнутой жордановой области $\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R$ со спрямляемой границей Γ_R :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \left[\Psi(\text{Ext} \Gamma_R, e^{i\sigma}) \right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z). \quad (6)$$

Ряды Тейлора являются частным случаем рядов (6) для замкнутого единичного круга $|z| \leq 1$ [6, с. 55, пример 1; 18, с. 350, пример 1].

Ряд по многочленам Фабера $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m F_m(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z)$, который обладает подпоследовательностью $\left(\sum_{m=0}^{N_p} a_m F_m(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z)\right)_{p=1}^{+\infty}$ частичных сумм, сходящейся и вне множества всех точек его сходимости, называется сверхсходящимся.

3. Ряды по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с аналитической границей. Спрямолинейная жорданова кривая Γ_A называется аналитической (analytical Jordan curve), если у её натуральной параметризации $z(s) = x(s) + i y(s)$, во-первых, координатные функции $x(s)$ и $y(s)$ аналитические на отрезке $0 \leq s \leq |\Gamma_A|$, где $|\Gamma_A|$ есть длина Γ_A , и, во-вторых, всюду на отрезке $0 \leq s \leq |\Gamma_A|$ выполняется тождество $[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1$. Простейшими примерами аналитических жордановых кривых являются окружность и её обобщение — эллипс.

Теорема П. Хойзера [19, с. 779—781]. Пусть Γ_A есть аналитическая жорданова кривая. И пусть функция f , во-первых, аналитическая в жордановой области $\text{Int} \Gamma_A$, и, во-вторых, имеет особую точку на её границе Γ_A . Тогда сверхсходимость разложения функции f по многочленам Фабера для замкнутой жордановой области $\Gamma_A \cup \text{Int} \Gamma_A$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \left[\Psi(\text{Ext} \Gamma_A, e^{i\sigma}) \right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_A \cup \text{Int} \Gamma_A, z) \quad (7)$$

в точке z_0 , не принадлежащей множеству всех точек сходимости ряда (7), влечёт сверхсходимость ряда

Тейлора $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \left[\Psi(\text{Ext} \Gamma_A, e^{i\sigma}) \right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot w^n$ в точке $w_0 := \Phi(\text{Ext} \Gamma_A, z_0)$, и наоборот.

В силу теоремы Г. Фабера [13, с. 53, § 2; 6, с. 75, теорема 1; 9, с. 31—32, (1), (2)] множество всех точек сходимости ряда (7) содержит жорданову область $\text{Int} \Gamma_A$.

Другую редакцию теоремы П. Хойзера дала Э. З. Шувалова [20, с. 84, лемма 3].

Теорему А. Островского с рядов Тейлора на ряды по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с аналитической (analytical) границей распространил С. Я. Альпер [21; 9, с. 35, теорема 8].

4. Криволинейный двуугольник П. К. Суегина. Функция $z = \Psi(C \setminus [-1, 1], w) := w + \sqrt{w^2 - 1}$, где выбрана та ветвь двузначной функции корень квадратный, для которой $\sqrt{1} = 1$, является обратной к функции Н. Е. Жуковского $w = \Phi(C \setminus [-1, 1], z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$; $\Psi(C \setminus [-1, 1], \infty) = \infty$. Она переводит против хода часовой стрелки (counterclockwise) единичную окружность $w = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, в комплексной w -плоскости переводит в проходимую также против хода часовой стрелки кривую $\Gamma_{\text{Apple}} := \left\{ z = e^{it} + \sqrt{e^{i2t} - 1} : -\pi \leq t \leq \pi \right\}$, которая напоминает контур осевого сечения яблока и которая имеет в z -плоскости в качестве осей симметрии как вещественную ось $\text{Re} z$, так и мнимую ось $i \text{Im} z$, и, следовательно, начало системы координат $z=0$ в качестве центра симметрии. Напомним, что плоскость в вещественном анализе служит для наглядного представления R^2 и что в комплексном анализе для наглядного представления множества комплексных чисел помимо C служит сфера S (две сферические проекции $C \leftrightarrow S$).

Значению параметра $t=0$ соответствует точка $z = e^{i \cdot 0} + \sqrt{e^{i2 \cdot 0} - 1} = 1$ на вещественной оси $\text{Re} z$, а для значения параметра $t = \pi/2$ по формуле Эйлера $\forall z \in C \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$ получаем точку

$z = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} + \sqrt{e^{i2 \cdot \frac{\pi}{2}} - 1} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{\cos \pi + i \sin \pi - 1} = i(1 + \sqrt{2})$ на мнимой оси $i \text{Im} z$. В случае значения

параметра $t = \pi/4$ имеем точку $z = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} + \sqrt{e^{i2 \cdot \frac{\pi}{4}} - 1} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{-1 + i}$. Для

корня квадратного по выбору ветви с $\sqrt{1+i}=1$ получаем: $\sqrt{-1+i}=\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=$
 $=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$. Согласно известным формулам тригонометрии $\cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=$
 $=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Подводим итог предыдущему: значению па-
 раметра $t=\pi/4$ соответствует точка $z=\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{12-8\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2}+4\sqrt{12+8\sqrt{2}}}{2}\approx 1,2+1,8i$ на комплексной
 (Re $z+i$ Im z)-плоскости.

В точках $z=1$ и $z=-1$ невыпуклая яблокоподобная область $\text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}$ имеет внешние углы раствора $\pi/2$.

Так как по определению (5) многочлен Фабера $F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, z)$ степени точно n для замк-
 нутой яблокоподобной области $\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}$ есть многочленная часть лорановского разложения n -той
 степени функции Н. Е. Жуковского $\Phi^n(C \setminus [-1, 1], z) := \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^n$ в окрестности бесконечно удалённой точ-
 ки $z = \infty$, то в силу формулы бинома Ньютона получаем [22, с. 118]: $\forall k \in Z_+$

$$F_{2k}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, z) = \frac{1}{2^{2k}} \left(C_{2k}^0 z^{2k} + C_{2k}^1 z^{2k-2} + C_{2k}^2 z^{2k-4} + \dots + C_{2k}^{k-2} z^4 + C_{2k}^{k-1} z^2 + C_{2k}^k \right),$$

$$F_{2k+1}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, z) = \frac{1}{2^{2k+1}} \left(C_{2k+1}^0 z^{2k+1} + C_{2k+1}^1 z^{2k-1} + C_{2k+1}^2 z^{2k-3} + \dots + C_{2k+1}^{k-2} z^5 + C_{2k+1}^{k-1} z^3 + \dots \right),$$

где биномиальные коэффициенты $\forall n \in Z_+ \quad \forall m \in [0, n] \cap Z_+ \quad C_n^m := \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

5. Контрпримеры в теории рядов по многочленам Фабера. Как известно [19, с. 781], теоремы теории рядов Тейлора легко распространяются на ряды по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с аналитической (analytical) границей.

П. К. Суетин без обращения к функции Н. Е. Жуковского и, следовательно, без параметрического задания кривой Γ_{Apple} , опираясь лишь на производящую функцию [6, с. 54, (14); 23, с. 54, (6.9)] для многочленов Фабера и на биномиальный ряд, распространяющий формулу бинома Ньютона на ненатуральные показатели степени, вычислил значения многочленов Фабера для криволинейного двуугольника $\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}$ в начале системы координат $z=0$ [6, с. 111, (16)]:

$$\forall k \in Z_+ \quad F_{2k+1}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, 0) = 0,$$

$$\forall k \in Z_1 \quad F_{2k}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, 0) = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \quad (8)$$

Опираясь на вычисленные значения, П. К. Суетин показал [6, с. 111], что ряд по многочленам Фабера для его криволинейного двуугольника $\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}$

$$\mathbf{E}^{p \in (1,2)}(\text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}) \ni f(z) \sim \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n} \cdot F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, z)$$

расходится в начале системы координат $z=0$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n} \cdot F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Apple}}, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2k} \ln(2k)} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k} \ln(2k)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)} = +\infty.$$

Также П. К. Суетин вычислил значения многочленов Фабера для его криволинейного двуугольника $\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}$ в угловой точке $z=1$ [6, с. 141]: $\forall k \in Z_+$ $F_{2k+1}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, 1) = \frac{1}{2}$, $\forall k \in Z_1$ $F_{2k}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, 1) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]$, и показал, что ряд по многочленам Фабера $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n b_n \times$
 $\times F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, z)$, в котором $\forall k \in Z_1$ вещественные числа $b_{2k} := \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_{2k+1} := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \times$
 $\times \left[1 + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]$ сходится в угловой точке $z=1$ и расходится в начале системы координат $z=0$.

Иными словами, П. К. Суетин на построенном им контрпримере показал [6, с. 140—141], что аналог первой теоремы Абеля для рядов по многочленам Фабера $F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, z)$ может не иметь места.

Рассмотрим ряд по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, z) \quad (9)$$

и степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n, \quad (10)$$

в которых вещественные коэффициенты

$$\forall k \in Z_+ \quad a_{2k} := k^2, \quad \forall k \in Z_1 \quad a_{2k-1} := \left(\frac{1}{3} \right)^{2k-1} - \frac{3}{2} k^2. \quad (11)$$

Поскольку обычные пределы $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} k^{1/k} = 1$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k-1}|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{1}{3} \right)^{2k-1} - \left(\frac{3}{2} \right) k^2 \right|^{1/(2k-1)} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3}{2} \right) k^2 \right]^{1/(2k-1)} = 1,$$

то согласно теореме Коши-Адамара степенной ряд (10) сходится внутри единичной окружности $|w|=1$ и расходится вне неё. Вычисляем частичные суммы чётного порядка степенного ряда (10) в точке $w=3/2$: $\forall N \in Z_+$

$$s_{2N} \left(\frac{3}{2} \right) := \sum_{k=0}^N k^2 \left(\frac{3}{2} \right)^{2k} + \sum_{k=1}^N \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{2k-1} - \frac{3}{2} k^2 \right] \left(\frac{3}{2} \right)^{2k-1} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} \right)^{2k-1} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{2N+1}}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^N \right].$$

Из предыдущего делаем вывод, что подпоследовательность $\left(\sum_{n=0}^{2N} a_n w^n \right)_{N=0}^{+\infty}$ частичных сумм степенного ряда (10) с чётными номерами сходится как в единичном круге $|w|<1$, так и в точке $w=3/2$, т. е. сверхсходится.

Символ $n!!$ обозначает произведение всех натуральных чисел $\leq n$ и имеющих с n одинаковую чётность. Поэтому очевидно, что

$$\forall k \in Z_1 \quad \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k-2} \cdot \frac{2k-3}{2k-4} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \geq \frac{1}{2k}. \quad (12)$$

Так как из (8) и (12) имеем

$$\forall k \in Z_1 \quad F_{2k}(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, 0) \geq \frac{1}{2k}, \quad (13)$$

то ряд (9) по многочленам Фабера для замкнутой яблокоподобной области $\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}$ расходится

в начале системы координат $z=0$: $\sum_{n=0}^{2N} a_n F_n(\Gamma_{\text{Apple}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}, 0) \stackrel{(13)}{\geq} \sum_{k=1}^N k^2 \cdot \frac{1}{2k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Таким образом, ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n F_n(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z)$ по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей с неаналитической (non-analytical) границей и соответствующие им степенные ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ могут вести себя по разному как в отношении сходимости, так и в отношении сверхсходимости.

6. Ряды по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей со спрямляемой гладкой границей С. Я. Альпера. Когда Γ_R есть спрямляемая жорданова кривая, то для почти всех значений натурального параметра $0 \leq s \leq |\Gamma_R|$ существует направленная в сторону возрастания s касательная (\Leftrightarrow существует положительная касательная) к Γ_R в точке $z(s)$. Обозначим через $\theta(s)$ угол между этой касательной и вещественной осью $\text{Re}z$ и отсчитываемый от положительного направления $\text{Re}z$. Если функция $\theta(s)$ непрерывная на отрезке $0 \leq s \leq |\Gamma_R|$, то говорят, что Γ_R есть гладкая жорданова кривая (smooth Jordan curve).

Для любого вещественного $\delta \in (0, |\Gamma_R|]$ через

$$\omega[\theta(s), \delta] := \sup \{ |\theta(s_1) - \theta(s_2)| : \forall s_1 \in [0, |\Gamma_R|] \forall s_2 \in [0, |\Gamma_R|] |s_1 - s_2| \leq \delta \}$$

обозначим модуль непрерывности функции $\theta(s)$ угла наклона касательной и для любого вещественного $\delta \in (0, \text{Diameter} \Gamma_R]$ через

$$\omega[f(z), \delta] := \sup \{ |f(z_1) - f(z_2)| : \forall z_1 \in \Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R \forall z_2 \in \Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R |z_1 - z_2| \leq \delta \} \quad (14)$$

обозначим телесный модуль непрерывности функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)$.

Теорема 1. Пусть $\Gamma_{\text{Al'per}}$ есть спрямляемая гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию С. Я. Альпера

$$\int_0^{\min\{1, |\Gamma_{\text{Al'per}}|\}} \frac{\omega[\theta(s), \delta]}{\delta} \ln \frac{1}{\delta} d\delta < +\infty. \quad (15)$$

И пусть функция $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}})$ имеет особую точку на $\Gamma_{\text{Al'per}}$ и удовлетворяет равномерному условию Дини

$$\int_0^{\text{Diameter} \Gamma_{\text{Al'per}}} \frac{\omega[f(z), \delta]}{\delta} d\delta < +\infty. \quad (16)$$

Тогда, во-первых, ряд по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \left[\Psi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, e^{i\sigma}) \right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}, z) \quad (17)$$

сходится равномерно на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}$ к функции $f(z)$ и, во-вторых, сверхсходимость ряда (17) в точке z_0 , не принадлежащей множеству $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}$ всех точек сходимости ряда (17), влечёт сверхсходимость степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \left[\Psi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, e^{i\sigma}) \right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot w^n \quad (18)$$

в точке $w_0 := \Phi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, z_0)$, и наоборот.

Ниже в следующем п. 7 вместо $f \left[\Psi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, e^{i\sigma}) \right]$ будем писать $f \left[\Psi(e^{i\sigma}) \right]$.

Условию С. Я. Альпера (15) удовлетворяют окружность и её обобщение — эллипс; аналитические жордановы кривые Γ_A ; спрямляемые гладкие жордановы кривые А. М. Ляпунова Γ_{Liapunov} , т. е. кривые, для которых существует вещественное число $0 < \alpha \leq 1$, такое, что $\omega[\theta(s), \delta] = O(\delta^\alpha)$, $\delta \rightarrow 0+0$.

Если $\Gamma_{\text{Al'per}}$ есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию (15), то по теореме С. Я. Альпера [6, с. 179, теорема 2] производная $\Psi'(e^{ix})$ непрерывная и отличная от нуля на вещественной прямой R , т. е. $\exists 0 < A_1 < +\infty \exists 0 < A_2 < +\infty \forall x \in R \quad A_1 \leq |\Psi'(e^{ix})| \leq A_2$. Отсюда следует [24, с. 312, следствие 2] выполнение прямой теоремы типа Д. Джексона на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}$. Так как $\Phi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, z)$ есть функция, обратная к функции Ψ , то производная $\Phi'(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, z) = (\Psi^{-1})'(z) = \frac{1}{\Psi'[\Phi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, z)]}$. Очевидно, что производная $\Phi'(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, z)$ непрерывная и отличная от нуля на кривой $\Gamma_{\text{Al'per}}$, т. е. $\forall z \in \Gamma_{\text{Al'per}} \quad 0 < 1/A_2 \leq |\Phi'(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, z)| \leq 1/A_1$. Отсюда вытекает [24, с. 310, следствие 1] выполнение обратной теоремы типа С. Н. Бернштейна на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}$.

Таким образом, в свете современных знаний определение (14) для любого вещественного $\delta \in (0, \text{Diameter} \Gamma_R]$ телесного модуля непрерывности функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)$ является естественным для тех замкнутых жордановых областей $\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R$, границами которых являются окружность и её обобщение — эллипс, аналитические жордановы кривые Γ_A , спрямляемые гладкие жордановы кривые А. М. Ляпунова Γ_{Liapunov} , спрямляемые гладкие жордановы кривые С. Я. Альпера $\Gamma_{\text{Al'per}}$.

В п. 8 будут рассматриваться замкнутые жордановы области $\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R$, которые могут не являются областями $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}$.

7. Доказательство теоремы 1. Шаг 0. Когда для спрямляемой жордановой кривой Γ_R функция $\theta(s)$ кусочно-непрерывная на отрезке $0 \leq s \leq |\Gamma_R|$, то говорят, что Γ_R есть кусочно-гладкая жорданова кривая (piecewise-smooth Jordan curve). Напомним, что функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если, во-первых, этот отрезок конечным числом точек разбивается на под-интервалы, во-вторых, функция непрерывная на всех этих под-интервалах, в-третьих, функция имеет конечные односторонние пределы во всех концевых точках данных под-интервалов.

Если ввести две односторонние касательные, направленные в сторону возрастания натурального параметра s , то алгебраическая сумма $\pi + \theta(s+0) - \theta(s-0)$ равна величине (\Leftrightarrow раствору) внешнего угла в радианах в точке $z(s)$. 1) В точке $z(s)$ заострения кривой Γ_R , направленного внутрь в $\text{Int} \Gamma_R$, величина внешнего угла равна 0. 2) В точке $z(s)$ существования касательной к кривой Γ_R величина внешнего угла равна π . 3) В точке $z(s)$ заострения кривой Γ_R , направленного наружу в $\text{Ext} \Gamma_R$, величина внешнего угла равна 2π .

Для функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)$ и любого вещественного $\delta \in (0, |\Gamma_R|]$ через

$$\omega\{f[z(s)], \delta\} := \sup\{|f[z(s_1)] - f[z(s_2)]| : \forall s_1 \in [0, |\Gamma_R|] \quad \forall s_2 \in [0, |\Gamma_R|] \quad |s_1 - s_2| \leq \delta\}$$

обозначим модуль непрерывности сложной функции $f[z(s)]$.

Если для функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R)$ существует вещественное число $0 < \alpha \leq 1$, такое, что $\omega\{f[z(s)], \delta\} = O(\delta^\alpha)$, $\delta \rightarrow 0+0$, то интеграл типа Коши $\forall z \notin \Gamma_R \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ задаёт две функции:

функцию $f^+ \in \mathbf{A}(\text{Int} \Gamma_R)$ и функцию $f^- \in \mathbf{A}(\text{Ext} \Gamma_R)$, $f^-(\infty) = 0$, которые непрерывно продолжимы на Γ_R и [25, с. 461, (5), (6)]

$$f^+[z(s)] := \lim_{\text{Int} \Gamma_R \ni z \rightarrow z(s) \in \Gamma_R} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{\pi + \theta(s+0) - \theta(s-0)}{2\pi} f[z(s)] + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \oint_{\zeta \in \Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z(s)} d\zeta, \quad (19)$$

$$f^-[z(s)] := \lim_{\text{Ext} \Gamma_R \ni z \rightarrow z(s) \in \Gamma_R} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{\theta(s+0) - \theta(s-0) - \pi}{2\pi} f[z(s)] + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \oint_{\zeta \in \Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z(s)} d\zeta, \quad (20)$$

где две буквы “P.V.” означают, что несобственные интегралы справа понимаются в смысле главного значения (principal value).

Функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$, вообще говоря, не являются аналитическим продолжением друг друга. На-

пример, для интеграла типа Коши, где $|z| \neq 1$, $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta(\zeta-2)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta-2}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{-1}{\zeta-z} d\zeta$, как

видно из интегральной формулы Коши, $f^+(z) = \frac{1}{z-2}$, а $f^-(z) = \frac{1}{z}$.

Н. И. Мухелишвили формулы (19) и (20) распространяют формулы И. И. Привалова [1, с. 416, теорема 1, (3)] с точек существования касательной к Γ_R и на угловые точки. Они позволяют для кусочно-гладких жордановых кривых без точек заострения по схеме С. Я. Альпера [6, с. 191, (10)] получить следующее интегральное представление:

$$\forall n \in Z_+ \quad F_n[\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, \Psi(e^{ix})] = e^{inx} + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{ix})} - \frac{1}{e^{it} - e^{ix}} \right] e^{int} d(e^{it}). \quad (21)$$

С. Я. Альпер показал [6, с. 181, (24), с. 191, (10)], что если $\Gamma_{\text{Al'per}}$ есть гладкая жорданова кривая, которая удовлетворяет условию (15), то несобственный интеграл в (21) существует в обычном смысле:

$$\forall n \in Z_+ \quad F_n[\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}, \Psi(e^{ix})] = e^{inx} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{ix})} - \frac{1}{e^{it} - e^{ix}} \right] e^{int} d(e^{it}). \quad (22)$$

Шаг 1. Если функция $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}})$, то отклонение [6, с. 191, (11)]

$$\begin{aligned} f[\Psi(e^{ix})] - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n[\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}}, \Psi(e^{ix})] = \\ = f^+(e^{ix}) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot e^{inx} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{ix})} - \frac{1}{e^{it} - e^{ix}} \right] \left\langle f^+(e^{it}) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot e^{int} \right\rangle d(e^{it}), \end{aligned} \quad (23)$$

где задаваемая интегралом типа Коши для $|w| < 1$ функция $f^+(w) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1} \frac{f[\Psi(\text{Ext} \Gamma_{\text{Al'per}}, \tau)]}{\tau - w} d\tau$ не только аналитическая в единичном круге $|w| < 1$, но [6, с. 182, теорема 4] и непрерывная на замкнутом единичном круге $|w| \leq 1$, при этом её телесный модуль непрерывности

$$\begin{aligned} \omega[f^+(w), \delta] &:= \sup\{|f(w_1) - f(w_2)| : \forall |w_1| \leq 1 \quad \forall |w_2| \leq 1 \quad |w_1 - w_2| \leq \delta\} \leq A(\Gamma_{\text{Al'per}}) \omega[f(z), \delta] := \\ &:= A(\Gamma_{\text{Al'per}}) \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| : \forall z_1 \in \Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}} \quad \forall z_2 \in \Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int} \Gamma_{\text{Al'per}} \quad |z_1 - z_2| \leq \delta\}, \end{aligned}$$

и где сложная функция $f^+(e^{ix})$ имеет тригонометрический ряд Фурье степенного типа [6, с. 191, (12)]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot e^{inx}. \quad (24)$$

Так как функция $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per})$ удовлетворяет равномерному условию Дини (16), то [26, с. 94–95, теорема (6.8); 27, с. 110, теорема 1.3] тригонометрический ряд Фурье степенного типа (24) сложной функции $f^+(e^{ix})$ сходится равномерно на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ к непрерывной функции $f^+(e^{ix}) \in C(T)$. Поэтому из (23) имеем равномерную сходимость на замкнутой жордановой области $\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}$ ряда по многочленам Фабера (17) к функции $f(z)$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{z \in \Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}} \left| f(z) - \sum_{n=0}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}, z) \right| = 0.$$

Шаг 2. Для функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per})$ очевидны неравенства

$$\forall n \in Z_+ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right| \leq \max_{z \in \Gamma_{Al'per}} |f(z)|,$$

из которых вытекает, что верхний предел

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right|^{1/n} \leq 1.$$

Опираясь на последнее неравенство покажем, что множество всех точек сходимости ряда по многочленам Фабера (17) совпадает с замкнутой жордановой областью $\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}$.

Допустим противное, что ряд по многочленам Фабера (17) сходится в некоторой точке $z_0 \in \text{Ext} \Gamma_{Al'per}$. Тогда в силу необходимого условия сходимости предел общего члена ряда по многочленам Фабера (17) в точке $z_0 \in \text{Ext} \Gamma_{Al'per}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}, z_0) = 0. \quad (25)$$

В силу предельного равенства Г. Фабера [6, с. 65, (9); 18, с. 360, следствие 3, (24)]

$$\forall z \in \text{Ext} \Gamma_{Al'per} \lim_{n \rightarrow +\infty} |F_n(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}, z)|^{1/n} = |\Phi(\text{Ext} \Gamma_{Al'per}, z)|.$$

Поэтому предельное равенство $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right|^{1/n} = 1$ невозможно.

Действительно, в противном случае имели бы

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}, z_0) \Big|^{1/n} = |\Phi(\text{Ext} \Gamma_{Al'per}, z_0)| =: r_0 > 1.$$

Тогда для счётного множества значений многочленов Фабера $F_n(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}, z_0)$ степени точно n

в точке z_0 $\left| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{Al'per} \cup \text{Int} \Gamma_{Al'per}, z_0) \right| \geq (r_0 - \varepsilon)^n > 1$, где $0 < \varepsilon < r_0 - 1$, т. е. не выполнялось бы необходимое условие сходимости (25).

Строгое предельное неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right|^{1/n} =: \frac{1}{r} < 1 \quad (26)$$

также невозможно.

Действительно, в случае выполнения (26) ряд по многочленам Фабера (17) сходил бы [6, с. 72, (4)] равномерно внутри области $\text{Int } \Psi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, |w| = r > 1)$, ограниченной аналитической жордановой кривой $\Psi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, |w| = r) := \{\Psi(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, w) \in C : |w| = r > 1\}$ (\Leftrightarrow r -линией уровня для замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$), и содержащей в качестве собственной части $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$. Тогда сумма ряда (17) — функция f — была бы аналитической на $\Gamma_{\text{Al'per}}$, что противоречит посылке теоремы: на $\Gamma_{\text{Al'per}}$ имеется особая точка функции $f \in \mathbf{A}(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}})$.

Значит, наше допущение, что ряд по многочленам Фабера (17) сходится в некоторой точке $z_0 \in \text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}$, ложно и, на самом деле, множество всех точек сходимости ряда по многочленам Фабера (17) равно $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$.

Шаг 3. Пусть ряд по многочленам Фабера (17) сверхсходится в некоторой точке z_0 , не принадлежащей множеству $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}$ всех точек сходимости ряда (17). Иными словами, пусть существует подпоследовательность последовательности частичных сумм ряда (17) с номерами $0 \leq N_0 < N_1 < N_2 < \dots < N_p < \dots$ которая сходится в точке $z_0 \in \text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}$:

$$\exists \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}, z_0) \in C. \quad (27)$$

На основании шага 2 в (27) сходимость в точке $z_0 \in \text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}$ подпоследовательности последовательности частичных сумм не может быть заменена на сходимость последовательности частичных сумм.

Интегральное представление А. И. Маркушевича многочленов Фабера [18, с. 358, теорема 2, (22')] приводит нас к стартовому представлению

$$\forall n \in Z_+ \quad F_n(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}, z_0) = (w_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \Gamma_{\text{Al'per}}} \frac{\Phi^n(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, \zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

и, очевидно, к рабочему равенству

$$\forall p \in Z_+ \quad \sum_{n=0}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int } \Gamma_{\text{Al'per}}, z_0) = \sum_{n=0}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot (w_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \Gamma_{\text{Al'per}}} \left(\sum_{n=0}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot \Phi^n(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, \zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (28)$$

Напоминаем, что пары $z \leftrightarrow w$ и $\zeta \leftrightarrow \tau$ суть стандартные обозначения в теории рядов по многочленам Фабера.

Как уже указывалось на шаге 1, равномерное условие Дини (16) влечёт равномерную сходимость на единичной окружности $\tau = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot \tau^n$ к непрерывной на отрезке $-\pi \leq t \leq \pi$ сложной функции $f^+(e^{it})$ и, следовательно, влечёт равномерную сходимость на спрямляемой гладкой жордановой кривой С. Я. Альпера $\Gamma_{\text{Al'per}}$ подпоследовательности

$$\left(\sum_{n=0}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot \Phi^n(\text{Ext } \Gamma_{\text{Al'per}}, \zeta) \right)_{p=0}^{+\infty}$$

последовательности частичных сумм к непрерывной по $\zeta \in \Gamma_{\text{Al'per}}$ функции $f^+(e^{it})_{t=-i \ln \Phi(\zeta)}$.

Для модуля контурного интеграла в правой части (28) имеем такую оценку:

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{Z}_+ \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\zeta \in \Gamma_{\text{BR}}} \left(\sum_{n=0}^{N_p} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Psi(e^{i\sigma})) e^{-in\sigma} d\sigma \right) \cdot \Phi^n(\text{Ext}\Gamma_{\text{Al'per}}, \zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right| \leq \\ \leq \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{Al'per}}} \left| f^+(e^{it}) \Big|_{t=-i \ln \Phi(\zeta)} \right| \cdot \frac{|\Gamma_{\text{Al'per}}|}{2\pi \text{dist}(\Gamma_{\text{Al'per}}, z_0)} < +\infty, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\text{dist}(\Gamma_{\text{Al'per}}, z_0) := \inf \{ |\zeta - z_0| : \zeta \in \Gamma_{\text{Al'per}} \} > 0$ есть расстояние от точки $z_0 \in \text{Ext}\Gamma_{\text{Al'per}}$ до спрямляемой гладкой жордановой кривой S . Я. Альпера $\Gamma_{\text{Al'per}}$.

В рабочем равенстве (28) левая часть в силу (27) имеет конечный предел, второе слагаемое правой части (28) в силу (29) тоже имеет конечный предел. Поэтому очевидно, что первое слагаемое правой части (28) имеет конечный предел:

$$\exists \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\Psi(e^{i\sigma})] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot (w_0)^n \in \mathbb{C}, \quad (30)$$

который означает сверхсходимость степенного ряда (18) в точке $w_0 := \Phi(\text{Ext}\Gamma_{\text{Al'per}}, z_0)$.

Шаг 4. Пусть степенной ряд (18) сверхсходится в некоторой точке w_0 , не принадлежащей замкнутому единичному кругу $|w| \leq 1$, т. е. пусть существует конечный предел (30) первого слагаемого правой части рабочего равенства (28). Как уже указывалось на предыдущем шаге 3, второе слагаемое правой части (28) согласно (29) имеет конечный предел. Из предыдущего следует, что левая часть (28) тоже имеет конечный предел (27), который означает сверхсходимость ряда по многочленам Фабера (17) в точке $z_0 := \Psi(\text{Ext}\Gamma_{\text{Al'per}}, w_0)$, не принадлежащей множеству $\Gamma_{\text{Al'per}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{Al'per}}$ всех точек сходимости ряда (17).

Доказательство теоремы 1 закончено.

8. Ряды по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей со спрямляемой границей ограниченного вращения. Спрямляемая жорданова кривая Γ_R характеризуется (\Leftrightarrow) тем свойством, что у её натуральной параметризации $z(s) = x(s) + iy(s)$, обе координатные функции имеют ограниченную вариацию на отрезке $0 \leq s \leq |\Gamma_R|$. В почти каждой точке $z(s)$ спрямляемой жордановой кривой Γ_R существует положительная касательная, т. е. касательная, направленная в сторону возрастания натурального параметра s . Через $\theta(s)$ мы обозначили угол между положительной касательной и вещественной осью $\text{Re}z$ и отсчитываемый от положительного направления $\text{Re}z$.

Говорят, что спрямляемая жорданова кривая Γ_{BR} является кривой ограниченного вращения (bounded rotation), если определённая для почти всех значений натурального параметра s функция $\theta(s)$ угла наклона касательной имеет ограниченную вариацию на отрезке $0 \leq s \leq |\Gamma_{\text{BR}}|$. Положительное вещественное число $V(\Gamma_{\text{BR}}) := \int_0^{|\Gamma_{\text{BR}}|} |d\theta(s)|$ называют полным вращением кривой Γ_{BR} .

Спрямляемые жордановы кривые Γ_{BR} ограниченного вращения могут иметь всюду плотное множество угловых точек.

Когда жорданова область $\text{Int}\Gamma_{\text{BR}}$ имеет спрямляемую границу ограниченного вращения, свободную от нулевых внешних углов, то как установили Т. Кёвари и Х. Поммеренке [28, с. 204, лемма 8] телесный модуль непрерывности $\forall \delta > 0 \quad \omega[\Psi(w), \delta] := \sup \{ |\Psi(w_1) - \Psi(w_2)| : \forall |w_1| \geq 1 \quad \forall |w_2| \geq 1 \quad |w_1 - w_2| \leq \delta \}$ удовлетворяет условию $\omega[\Psi(w), \delta] = O(\delta^\alpha)$, $\delta \rightarrow 0+0$, с некоторым показателем степени $0 < \alpha \leq 1$.

Спрямляемые же жордановы кривые Γ_{BR} ограниченного вращения без точек заострения могут иметь не более чем счётное множество угловых точек с величинами внешних углов строго между 0 и 2π .

Любая выпуклая жорданова кривая (convex Jordan curve) является спрямляемой жордановой кривой Γ_{BR} ограниченного вращения с полным вращением $V(\Gamma_{\text{Convex}}) = 2\pi$.

Для выпуклой жордановой области $\text{Int}\Gamma_{\text{Convex}}$, содержащей внутри себя начало системы координат $z=0$, функция $w = \Phi(\text{Ext}\Gamma_{\text{Convex}}, z)$ согласно Д. Гайеру [29, с. 582, теорема 3] удовлетворяет условию

$\forall z_1 \in \text{Ext}\Gamma_{\text{Convex}} \quad \forall z_2 \in \text{Ext}\Gamma_{\text{Convex}} \quad |\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| \leq \frac{2}{(r_1)^2 \cdot r_2} |z_1 - z_2|$, где r_1 и r_2 суть расстояния от точки

$z=0$ до соответственно границы Γ_{Convex} и её образа $\left\{ \frac{1}{z} \in C : z \in \Gamma_{\text{Convex}} \right\}$ при отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$ (инверсии

\Leftrightarrow симметрии относительно единичной окружности $|z|=1$) и где постоянная 2 не может быть уменьшена.

Круг и его обобщение — эллипс, а также все жордановы области с аналитической границей Γ_A принадлежат пересечению множеств $\text{Int}\Gamma_{\text{Liapunov}} \cap \text{Int}\Gamma_{\text{BR}}$.

Функция

$$\theta_1(s) := \begin{cases} 0, & \text{когда } s = 0, \\ -\frac{1}{\ln s}, & \text{когда } 0 < s \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

на отрезке $0 \leq s \leq 1/2$ имеет ограниченную вариацию и непрерывная, но ни при каком показателе степени $0 < \alpha \leq 1$ не удовлетворяет условию $\omega[\theta_1(s), \delta] = O(\delta^\alpha)$, $\delta \rightarrow 0+0$. Следовательно, разность множеств $\text{Int}\Gamma_{\text{BR}} \setminus \text{Int}\Gamma_{\text{Liapunov}}$ не является пустой.

На отрезке $0 \leq s \leq 1$ функция

$$\theta_2(s) := \begin{cases} 0, & \text{когда } s = 0, \\ s \cos \frac{\pi}{2s}, & \text{когда } 0 < s \leq 1, \end{cases}$$

удовлетворяет условию $\omega[\theta_2(s), \delta] = O(\delta^\beta)$, $\delta \rightarrow 0+0$, с некоторым показателем степени $0 < \beta < 1/2$, но имеет бесконечную вариацию. Стало быть, разность множеств $\text{Int}\Gamma_{\text{Liapunov}} \setminus \text{Int}\Gamma_{\text{BR}}$ также не является пустой.

Итак, множество жордановых областей $\text{Int}\Gamma_{\text{BR}}$ со спрямляемой границей ограниченного вращения и множество жордановых областей $\text{Int}\Gamma_{\text{Al'per}}$ со спрямляемой границей, которая является гладкой и дополнительно удовлетворяет условию С. Я. Альпера (15), различны в том смысле, что каждое из этих множеств содержит область, не принадлежащую другому множеству.

Введём модуль непрерывности сложной функции $f[\Psi(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{ix})]$ [18, с. 148—149, замечание 2]: для положительного вещественного $0 < \delta \leq 3\pi$

$$\omega\left\{f\left[\Psi\left(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{ix}\right)\right], \delta\right\} := \sup\left\{\left|f\left[\Psi\left(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{ix_1}\right)\right] - f\left[\Psi\left(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{ix_2}\right)\right]\right| : \forall x_1 \in [0, 3\pi] \quad \forall x_2 \in [0, 3\pi] \quad |x_1 - x_2| \leq \delta\right\}.$$

Теорема 2. Пусть Γ_{BR} есть спрямляемая жорданова кривая ограниченного вращения. И пусть функция $f \in A(\Gamma_{\text{BR}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{BR}})$ имеет особую точку на Γ_{BR} и удовлетворяет равномерному условию Дини

$\int_0^{3\pi} \frac{\omega\left\{f\left[\Psi\left(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{ix}\right)\right], \delta\right\}}{\delta} d\delta < +\infty$. Тогда, во-первых, ряд по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left[\Psi\left(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{i\sigma}\right)\right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot F_n(\Gamma_{\text{BR}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{BR}}, z) \quad (31)$$

сходится равномерно на замкнутой жордановой области $\Gamma_{\text{BR}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{BR}}$ к функции $f(z)$ и, во-вторых, сверхсходимость ряда (31) в точке z_0 , не принадлежащей множеству $\Gamma_{\text{BR}} \cup \text{Int}\Gamma_{\text{BR}}$ всех точек сходимости ряда (31), влечёт сверхсходимость степенного ряда

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left[\Psi\left(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, e^{i\sigma}\right)\right] e^{-in\sigma} d\sigma \right\} \cdot w^n$

в точке $w_0 := \Phi(\text{Ext}\Gamma_{\text{BR}}, z_0)$, и наоборот.

9. Доказательство теоремы 2. Шаг 0. Если Γ_R есть спрямляемая жорданова кривая, то согласно теореме братьев Ф. и М. Рисс [1, с. 405, теорема 1], во-первых, функция $z = \Psi(\text{Ext}\Gamma_R, w)$, обратная к функции $w = \Phi(\text{Ext}\Gamma_R, z)$, как уже отмечалось в п. 2, абсолютно непрерывная на единичной окружности $|w|=1$, во-вторых, её производная $\Psi'(\text{Ext}\Gamma_R, w)$ принадлежит классу Харди $\mathbf{H}^1(|w|>1)$, в-третьих, почти всюду на единичной окружности $\{e^{it} : -\pi \leq t \leq \pi\}$ производная сложной функции $\frac{d}{dt} [\Psi(\text{Ext}\Gamma_R, e^{it})] \stackrel{\text{almost everywhere}}{=} i e^{it} \Psi'(\text{Ext}\Gamma_R, e^{it})$, в-четвёртых, для любого значения параметра $-\pi \leq t_1 \leq \pi$ длина дуги $\{z = \Psi(\text{Ext}\Gamma_R, e^{it}) \in C : -\pi \leq t \leq t_1 \leq \pi\}$ кривой Γ_R вычисляется по формуле $s(t_1) = \int_{-\pi}^{t_1} |\Psi'(\text{Ext}\Gamma_R, e^{it})| dt$. В силу этой теоремы законна замена переменной интегрирования ниже в интегралах (32) и (33).

Для фиксированного $z \in \Gamma_R$ по известному [6, с. 54, (11); 18, с. 358, теорема 2, (22); 23, с. 54, (6.8)] интегральному представлению Г. Фабера его многочленов

$$\forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_R \cup \text{Int}\Gamma_R, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \frac{[\Phi(\text{Ext}\Gamma_R, \zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \frac{\tau^n \Psi'(\text{Ext}\Gamma_R, \tau)}{\Psi(\text{Ext}\Gamma_R, \tau) - z} d\tau. \quad (32)$$

Множество точек комплексной плоскости $\{\zeta = \Psi(\text{Ext}\Gamma_R, \tau) \in C : |\tau|=1+\varepsilon>1\}$ (аналитическую жорданову кривую) называют $(1+\varepsilon)$ -линией уровня для замкнутой жордановой области $\Gamma_R \cup \text{Int}\Gamma_R$. По интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned} \forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad & \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \frac{\tau^n \Psi'(\text{Ext}\Gamma_R, \tau)}{\Psi(\text{Ext}\Gamma_R, \tau) - z} d\tau = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \frac{[\Phi(\text{Ext}\Gamma_R, \zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{[\Phi(\text{Ext}\Gamma_R, \zeta)]^n} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

По правилу дифференцирования сложной функции интегральное представление (32) принимает вид

$$\forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_R \cup \text{Int}\Gamma_R, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \tau^n d_\tau \{ \ln[\Psi(\tau) - z] \}. \quad (34)$$

Для комплексного числа в показательной форме $\tau = (1+\varepsilon)e^{it}$ комплексно-сопряжённое к нему число $\bar{\tau} = (1+\varepsilon)e^{-it}$. Поэтому $\tau^{-n} = [(1+\varepsilon)e^{it}]^{-n} = \frac{[(1+\varepsilon)e^{-it}]^n}{(1+\varepsilon)^{2n}} = \frac{(\bar{\tau})^n}{(1+\varepsilon)^{2n}}$ и интегральное представление (33) принимает следующий вид:

$$\forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad 0 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2n}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} (\bar{\tau})^n d_\tau \{ \ln[\Psi(\tau) - z] \}. \quad (35)$$

Берём комплексное сопряжение к (35)

$$\forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad \bar{0} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2n}} \cdot \frac{1}{2\pi(-i)} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \tau^n d_\tau \{ \overline{\ln[\Psi(\tau) - z]} \}$$

и получаем

$$\forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \tau^n d_\tau \{ \overline{\ln[\Psi(\tau) - z]} \}. \quad (36)$$

Вычитаем из представления (34) представление (36): $\forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1$

$$F_n(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \tau^n d_\tau \left\{ \ln[\Psi(\tau)-z] - \overline{\ln[\Psi(\tau)-z]} \right\}.$$

Отсюда с учётом того, что

$$\ln[\Psi(\tau)-z] - \overline{\ln[\Psi(\tau)-z]} = |\Psi(\tau)-z| + i \arg[\Psi(\tau)-z] - \left\{ |\overline{\Psi(\tau)-z}| + i \arg[\overline{\Psi(\tau)-z}] \right\} = 2i \arg[\Psi(\tau)-z],$$

имеем интегральное представление

$$\forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z) = \frac{1}{\pi} \oint_{|\tau|=1+\varepsilon>1} \tau^n d_\tau \arg[\Psi(\tau)-z] = \frac{(1+\varepsilon)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d_t \arg \left\{ \Psi \left[(1+\varepsilon)e^{it} \right] - z \right\}.$$

В последнем определённом интеграле интегрируем по частям и учитываем, что $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$:

$$\begin{aligned} \forall z \in \Gamma_R \quad \forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_R \cup \text{Int} \Gamma_R, z) &= \\ &= \frac{(1+\varepsilon)^n}{\pi} \left(e^{int} \cdot \arg \left(\Psi \left((1+\varepsilon)e^{it} \right) - z \right) \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \arg \left(\Psi \left((1+\varepsilon)e^{it} \right) - z \right) d(e^{int}) \right) = \\ &= -\frac{(1+\varepsilon)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arg \left\{ \Psi \left[(1+\varepsilon)e^{it} \right] - z \right\} d(e^{int}). \end{aligned} \quad (37)$$

До сих пор предполагалось, что Γ_R есть спрямляемая жорданова кривая.

Если допустить, что $\Gamma_R \supset \Gamma_{BR}$, то множество функций $\arg \left\{ \Psi \left[(1+\varepsilon)e^{it} \right] - z \right\}$ от двух переменных t и ε ограничено на отрезке $-\pi \leq t \leq \pi$ и равномерно сходится на этом отрезке при $\varepsilon \rightarrow 0+0$. Поэтому в последнем интеграле (37) допустим предельный переход под знаком интеграла при $\varepsilon \rightarrow 0+0$:

$$\forall z \in \Gamma_{BR} \quad \forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_{BR} \cup \text{Int} \Gamma_{BR}, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arg \left[\Psi(e^{it}) - z \right] d(e^{int}).$$

Снова применяем метод интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \forall z \in \Gamma_{BR} \quad \forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_{BR} \cup \text{Int} \Gamma_{BR}, z) &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ e^{int} \cdot \arg \left[\Psi(e^{it}) - z \right] \Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d_t \arg \left[\Psi(e^{it}) - z \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует интегральное представление Х. Поммеренке [6, с. 226, теорема 11, (22); 23, с. 57, (6.13)] многочленов Фабера

$$\forall z \in \Gamma_{BR} \quad \forall n \in Z_1 \quad F_n(\Gamma_{BR} \cup \text{Int} \Gamma_{BR}, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d_t \arg \left[\Psi(e^{it}) - z \right], \quad (38)$$

полученное методом S. W. Ellacott [23, с. 57–58] (его нет в немецком первоисточнике) с нашим отношением к строгости обоснований.

Если ввести две односторонние касательные, направленные в сторону возрастания натурального параметра s , то скачок функции $\arg \left[\Psi(e^{it}) - z \right]$ в угловой точке $z \in \Gamma_{BR}$ равен величине внешнего угла в радианах. Для невыпуклой яблокоподобной области $\text{Int} \Gamma_{\text{Apple}}$ скачок функции $\arg \left[\Psi(e^{it}) - z \right]$ в угловой точке $z=1$ равен $\pi/2$.

Шаг 1 доказательства теоремы 1 опирается на интегральное представление С. Я. Альпера (22), а доказательство теоремы 2 опирается на интегральное представление Х. Поммеренке (38).

Шаги 2–4 доказательства теоремы 2 аналогичны соответствующим шагам доказательства теоремы 1.

10. Заключение. В п. 1 обстоятельно разъяснено понятие сверхсходимости рядов Тейлора (частный случай рядов по многочленам Фабера) и указано на установленную А. Островским глубокую связь между явлением сверхсходимости рядов Тейлора и наличием нулевых коэффициентов у ряда Тейлора. В п. 4

функция, обратная к функции Н. Е. Жуковского, привлечена к рассмотрению криволинейного двуугольника (curvilinear two-angle) П. К. Суетина и явно выписаны многочлены Фабера для криволинейного двуугольника П. К. Суетина. В п. 5 продолжены исследования П. К. Суетина по построению контрпримеров в теории рядов по многочленам Фабера и указаны степенной ряд и ряд с теми же коэффициентами по многочленам Фабера для замкнутой жордановой области с неаналитической (non-analytical) границей, которые ведут себя по разному в отношении сверхсходимости. В основном п. 6 приведены дополнительные условия, при выполнении которых степенной ряд и ряд с теми же коэффициентами по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей со спрямляемой гладкой границей С. Я. Альпера ведут себя одинаково в отношении сверхсходимости. В п. 8 без доказательства выписаны дополнительные условия, при выполнении которых степенной ряд и ряд с теми же коэффициентами по многочленам Фабера для замкнутых жордановых областей со спрямляемой границей ограниченного вращения ведут себя одинаково в отношении сверхсходимости. Напомним, что множество жордановых областей $\text{Int } \Gamma_{\text{Alper}}$ со спрямляемой гладкой границей С. Я. Альпера и множество жордановых областей $\text{Int } \Gamma_{\text{BR}}$ со спрямляемой границей ограниченного вращения различны в том смысле, что каждое из этих множеств содержит область, не принадлежащую другому множеству. Полученные нами результаты могут быть применены в теоретических исследованиях по теории степенных рядов и по теории рядов по многочленам Фабера, а также при чтении специальных курсов по теории приближений.

Список цитируемых источников

1. Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. — М.: Наука, 1966. — 628 с.
2. Уолш, Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области / Дж. Л. Уолш. — М.: Изд-во иностранной лит., 1961. — 508 с.
3. Porter, M. B. On the polynomial convergence of a power series / M. B. Porter // *Annals of mathematics* (2). — 1906—1907. — Vol. 8. — P. 189—192.
4. Jentzsch, R. Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen / R. Jentzsch // *Acta mathematica*. — 1918. — Vol. 41. — P. 219—251.
5. Ostrowski, A. Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten / A. Ostrowski // *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-Mathematische Klasse*. — 1921. — S. 557—567.
6. Суетин, П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин. — М.: Наука, 1984. — 336 с.
7. Bourion, G. L'ultraconvergence dans les séries de Taylor / G. Bourion // *Actualités scientifiques et industrielles. Exposés sur la théorie des fonctions*. — Paris: Hermann & C^{ie}, 1937. — Vol. 472, № VIII. — 46 p.
8. Luh, W. Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten / W. Luh // *Mitteilungen aus dem mathem. Seminar Gissen*. — 1970. — Heft 88. — S. 1—56.
9. Iliev, L. Analytisch nichtfortsetzbare Reihen / L. Iliev. — Sofia: Verlag der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften, 1988. — 157 S.
10. Runge, C. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen / C. Runge // *Acta mathematica*. — 1885. — Bd. 6. — S. 228—244.
11. Hilbert, D. Ueber die Entwicklung einer beliebigen analytischen Function einer Variablen in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe / D. Hilbert // *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*. — 1897. — Heft 1. — S. 63—70.
12. Painlevé, P. Sur le développement des fonctions uniformes ou holomorphes dans un domaine quelconque / P. Painlevé // *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. — 1898. — T. 126, № 4. — P. 318—321.
13. Faber, G. Über Reihenentwicklungen analytischer Funktionen: Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde: защищена 20.04.1902 / Faber Georg. — Leipzig: Druck von B. G. Teubner, 1903. — 68 S.
14. Szegő, G. Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören / G. Szegő // *Mathematische Zeitschrift*. — 1921. — Bd. 9. — S. 218—270.
15. Bochner, S. Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen / S. Bochner // *Mathematische Zeitschrift*. — 1922. — Bd. 14, № 3. — S. 180—207.
16. Carleman, T. Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen / T. Carleman // *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*. — 1922—1923. — Bd. 17, № 9. — S. 1—30.
17. Качмаж, С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 507 с.
18. Дзядык, В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
19. Heuser, P. Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen / P. Heuser // *Mathematische Zeitschrift*. — 1934. — Bd. 38, № 5. — S. 777—782.
20. Шувалова, Э. З. О сверхсходимости последовательности полиномов / Э. З. Шувалова // *Математ. сб.* — 1952. — Т. 31, № 1. — С. 76—87.
21. Альпер, С. Я. О сверхсходимости рядов по полиномам / С. Я. Альпер // *Доклады АН СССР*. — 1948. — Т. 59, № 4. — С. 625—627.
22. Бруй, И. Н. К понятию сопряженности в теории рядов по многочленам Фабера / И. Н. Бруй // *Экономика, технологии и право в современном мире: материалы Междунар. науч.-практ. конф. фак. экономики и права и инженер. ф-та, Барановичи, 20 окт. 2016 г.* / редкол.: А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач, В. Н. Кременевская (отв. секр.) [и др.]. — Барановичи: БарГУ, 2017. — С. 113—122.
23. Гайер, Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер. — М.: Мир, 1986. — 216 с.
24. Anderson, J. M. On Theorems of Jackson and Bernstein Type in the Complex Plane / J. M. Anderson, A. Hinkkanen, F. D. Lesley // *Constructive Approximation*. — 1988. — Vol. 4, № 3. — P. 307—319.
25. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
26. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды: в 2 т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. I. — 616 с.
27. Гарнетт, Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. — М.: Мир, 1984. — 469 с.
28. Kövari, T. On Faber Polynomials and Faber Expansions / T. Kövari, Ch. Pommerenke // *Mathematische Zeitschrift*. — 1967. — Bd. 99, № 3. — S. 193—206.
29. Gaier, D. Estimates of Conformal Mappings Near the Boundary / D. Gaier // *Indiana University Mathematics Journal*. — 1972. — Vol. 21, № 7. — P. 581—595.