Подставляя (2) и (4) в (1), с учетом (5), (6), (11) и (12) получаем:

$$\rho = \left(\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) m_n + m_p + \frac{c_1 A^{-1/3} - c_0 + c_2 \xi^2 A^{2/3} + c_3 (1-2\xi)^2 + c_4 (1-2\xi)^4 + c_5 B_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4/3} \xi A^{2/3}}{\xi c^2} + m_e \right) \times$$

$$\times \sum_s \sum_n \left(\frac{\left((m_n - m_p) c^2 + 4c_3 - 2\xi \left(4c_3 + c_2 A^{2/3}\right) + 8c_4 (1-2\xi)^3 - c_5 B_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4/3} A^{2/3} \right)^2}{2 m_e c^2 \mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}} - \right.$$

$$- 2n - 1 - 2s - \frac{\left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}328 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)^2 2\mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}}{4 m_e c^2} - 2s \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}328 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \sqrt{1 + 2\mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} \frac{2n+1+2s}{m_e c^2}} -$$

$$\left. - \frac{m_e^2 c^4}{2 m_e c^2 \mu_B B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}} \right)^{1/2} \times \frac{\left(2 m_e c^2 \mu_B B_0\right)^{3/2} \rho}{2\pi^2 c^3 \hbar^3 \rho_0}. \qquad (13)$$

Все величины в (13), кроме ξ, считаются известными. Решая (13) численно относительно ξ, можно затем найти n_e с учетом (8)–(12), а затем n_A с учетом (2). Также можно найти давление электронов по формулам, приведенным в [3, с. 39–40].

При ρ ~ 10^9 г/см^3, B_0 ~ 10^{13} Гс, что дает в (6) значения B, еще встречающиеся в нейтронных звездах, получаем (при $A = 64$) ξ ~ 0,4, n_e ~ $2{,}6 \cdot 10^{32}$ см$^{-3}$, n_A ~ $9{,}3 \cdot 10^{30}$ см$^{-3}$.

Заключение. Получены уравнения для параметров электронно-нуклонного вещества в квантующем для электронов магнитном поле в приближении крайнего вырождения. При заданных значениях массового числа, плотности и индукции магнитного поля численное решение системы позволяет найти значения зарядового числа, концентрации электронов и ядер в относительно равновесном состоянии. При ρ ~ 10^9 г/см^3, B_0 ~ 10^{13} Гс, и $A = 64$ получаются значения ξ ~ 0,4, n_e ~ $2{,}6 \cdot 10^{32}$ см$^{-3}$, n_A ~ $9{,}3 \cdot 10^{30}$ см$^{-3}$.

Список цитируемых источников

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. / Г. С. Саакян. — М. : Наука, 1972. — 344 с.
2. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: В 2-х ч. : пер. с англ. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски. — М. : Мир, 1985. — Ч. 1. — 256 с., ил.
3. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т имени А. С. Пушкина. – Брест : Издательство БрГУ, 2008. – 198 с.
4. Кац, П. Б. Формула Бете–Вайцзеккера. Обзор и подбор коэффициентов / П. Б. Кац, С. М. Удовенко // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2021. – № 2. – С. 26–45.
5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, 1980. — Т. IV: Квантовая электродинамика. — 704 с.

УДК 519.642

В. С. Фаворская, Д. Д. Ревидович, Ю. Ф. Мирошникова
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»,
Барановичи, Республика Беларусь

ПРИЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Введение. Интегральное исчисление имеет достаточно широкий спектр применения: математика, физика, экономика, инженерия, медицина, астрономия, программирование и другие области. Особый интерес представляет нахождение площадей фигур, изучаемых в школьном курсе математики, с помощью определённого и двойного интегралов.

Основная часть. Интеграл — это математический инструмент, позволяющий находить площади фигур, ограниченных кривыми, а также для а также решать иные задачи в различных областях науки. Выделяют определённые и неопределённые интегралы, собственные и несобственные интегралы, кратные интегралы (двойные, тройные и т. д.), криволинейные интегралы.

Определённый интеграл позволяет находить площади любых плоских фигур, вычислять объёмы тел, определять длину кривых на плоскости и в трёхмерном пространстве. В физике и механике определённый интеграл используется для расчёта статических моментов, масс и координат центров масс материальных кривых и поверхностей, определения работы, совершаемой переменной силой при движении по криволинейной траектории, анализа других задач, связанных с непрерывным распределением величин (например, энергии, давления).

Двойные интегралы представляют собой интегралы, подынтегральная функция которой зависит от двух независимых переменных. Вычисление таких интегралов сводится к вычислению двух повторных интегралов: сначала по одной переменной. Двойные интегралы используют в различных областях для решения задач, связанных с двумерными областями.

Целью нашей работы является получение формул для расчета площадей различных геометрических фигур, изучаемых в школьном курсе математики, с помощью определённого и двойного интегралов. Рассмотрим плоские фигуры (рисунки 1—8):

1. Квадрат.

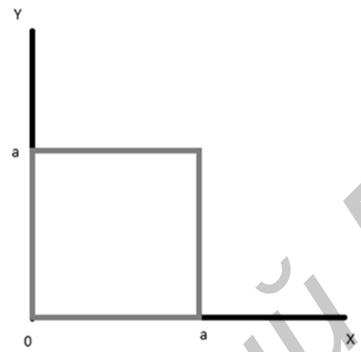

Рисунок 1 — Квадрат

$$S = \int_0^a a \cdot dx = a\int_0^a dx = a \cdot x\Big|_0^a = a \cdot (a - 0) = a^2;$$

$$S = \iint_s dx \cdot dy = \int_0^a dx\int_0^a dy = \int_0^a dx \cdot y\Big|_0^a = \int_0^a a \cdot dx = a\int_0^a dx = a \cdot x\Big|_0^a = a \cdot (a - 0) = a^2.$$

Формулы совпадают с формулой школьного курса математики $S = a^2$, где a — длина стороны квадрата.

2. Прямоугольник.

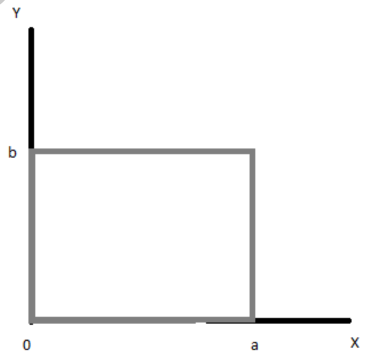

Рисунок 2 — Прямоугольник

$$S = \int_0^a b \cdot dx = b\int_0^a dx = b \cdot x\Big|_0^a = b \cdot (a - 0) = ab;$$

$$S = \iint_s dx \cdot dy = \int_0^a dx\int_0^b dy = \int_0^a dx \cdot y\Big|_0^b = \int_0^a b \cdot dx = b\int_0^a dx = b \cdot x\Big|_0^a = b \cdot (a - 0) = ab.$$

Формулы совпадают с формулой школьного курса математики $S = ab$, где a и b — длины сторон прямоугольника.

3. Треугольник прямоугольный.

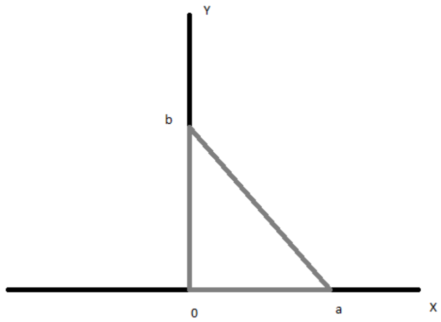

Рисунок 3 — Прямоугольный треугольник

Пусть x_1 — (a;0), а x_2 — (0;b). Тогда составим уравнение гипотенузы треугольника:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}\Rightarrow -a\cdot y=b\cdot\left(x-a\right)\Rightarrow -ay=bx-ab\Rightarrow y=\frac{ab-bx}{a};$$

$$S=\int_0^a\frac{ab-bx}{a}\cdot dx=\frac{b}{a}\cdot\left(a\cdot x\Big|_0^a-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a\right)=\left(\frac{2abx-bx^2}{2a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2aba-ba^2}{2a}-\frac{2ab\cdot 0-b\cdot 0^2}{2a}=\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}ab;$$

$$S=\iint_s dx\cdot dy=\int_0^a dx\int_0^{-\frac{b}{a}x+b}dy=\int_0^a dx\cdot y\Big|_0^{-\frac{b}{a}x+b}=\int_0^a\left(-\frac{b}{a}x+b\right)\cdot dx=\left(-\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2}{2}+bx\right)\Bigg|_0^a=-\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}+ab=-\frac{ab}{2}+ab=\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}ab.$$

Формулы совпадают с формулой школьного курса математики $S=\frac{1}{2}ab$, где a и b — длины катетов прямоугольного треугольника.

4. Треугольник равнобедренный.

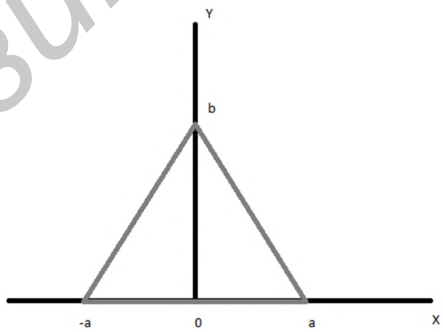

Рисунок 4 — Равнобедренный треугольник

Так как равнобедренный треугольник разбит высотой на два одинаковых по площади прямоугольных треугольника, то из формул, полученных выше $S=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=ab=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b$.

Формула совпадает с формулой школьного курса математики $S=\frac{1}{2}ah$, где a — длина основания (в нашем случае равная $2a$), а h — длина высоты треугольника, опущенной на основание (в нашем случае равная b).

5. Ромб.

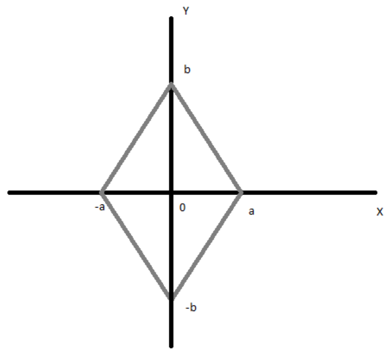

Рисунок 5 — Ромб

Так как ромб разбит диагоналями на четыре одинаковых по площади прямоугольных треугольника, то из формул, полученных выше $S = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) = 2ab = \frac{1}{2} 2a \cdot 2b$.

Формула совпадает с формулой школьного курса математики $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей ромба (в нашем случае равные 2a и 2b).

6. Трапеция.

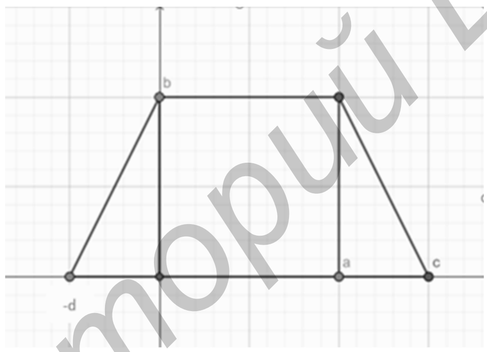

Рисунок 6 — Трапеция

Пусть x_1 — (-d;0), а x_2 — (0;b). Тогда составим уравнение гипотенузы левого треугольника:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x + d}{0 + d} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow 1 + \frac{x}{d} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b + \frac{b}{d} x;$$

Пусть x_1 — (c;0), а x_2 — (a;b). Тогда составим уравнение гипотенузы правого треугольника:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - c}{a - c} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \frac{x - c}{a - c} b = y \Rightarrow y = \frac{b}{a - c} x - \frac{bc}{a - c};$$

$$S = \int_{-d}^{0} \left(b + \frac{b}{d} x \right) \cdot dx + \int_{0}^{a} b \cdot dx + \int_{a}^{c} \left(\frac{b}{a-c} x - \frac{cb}{a-c} \right) \cdot dx = \left(bx + \frac{bx^2}{2d} \right) \Bigg|_{-d}^{0} + bx \Big|_{0}^{a} + \left(\frac{bx^2 - 2bcx}{2a - 2c} \right) \Bigg|_{a}^{c} = \frac{1}{2} bd + ab +$$

$$+ \frac{bc - ab}{2} = \frac{1}{2} bd + \frac{ab + bc}{2} = \frac{1}{2} b \cdot (d + a + c);$$

$$S = \iint\limits_{s_1+s_2+s_3} dx\cdot dy = \int_{-d}^{0} dx \int_0^{b+\frac{b}{d}x} dy + \int_0^a dx \int_0^b dy + \int_a^c dx \int_0^{\frac{b}{a-c}x-\frac{cb}{a-c}} dy = \int_{-d}^{0} dx\cdot y\Big|_0^{b+\frac{b}{d}x} + \int_0^a dx\cdot y\Big|_0^b + \int_a^c dx\cdot y\Big|_0^{\frac{b}{a-c}x-\frac{bc}{a-c}} =$$

$$= \int_{-d}^{0}\left(b+\frac{b}{d}x\right)\cdot dx + \int_0^a b\cdot dx + \int_a^c\left(\frac{b}{a-c}x-\frac{cb}{a-c}\right)\cdot dx = \left(bx+\frac{bx^2}{2d}\right)\Bigg|_{-d}^{0} + bx\Big|_0^a + \left(\frac{bx^2-2bcx}{2a-2c}\right)\Bigg|_a^c = \frac{1}{2}bd+ab+$$

$$+\frac{bc-ab}{2} = \frac{1}{2}bd+\frac{ab+bc}{2} = \frac{1}{2}b\cdot\left(d+a+c\right).$$

Формула совпадает с формулой школьного курса математики $S = \frac{1}{2}\left(a+b\right)\cdot h$, где a и b — длины оснований трапеции (в нашем случае равные a и $d+c$), h — длина высоты (в нашем случае равные b).

7. Произвольный треугольник.

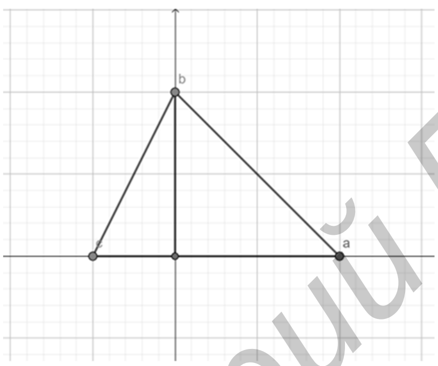

Рисунок 7 — Произвольный треугольник

Высотой треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника. Площадь правого треугольника найдена выше и равна $S = \frac{1}{2}ab$.

Пусть x_1 — (-c;0), а x_2 — (0;b). Тогда составим уравнение гипотенузы левого треугольника:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x+c}{0+c} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x+c}{c} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b+\frac{b}{c}x;$$

тогда площадь левого треугольника $S = \int_{-c}^{0}\left(b+\frac{b}{c}x\right)\cdot dx = \left(bx+\frac{bx^2}{2c}\right)\Bigg|_{-c}^{0} = bc-\frac{bc^2}{2c} = \frac{1}{2}bc;$

Таким образом площадь произвольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b\cdot(a+c)$.

$$S = \iint\limits_{s_1+s_2} dx\cdot dy = \int_{-c}^{0} dx \int_0^{b+\frac{b}{c}x} dy + \frac{1}{2}ab = \int_{-c}^{0} dx\cdot y\Big|_0^{b+\frac{b}{c}x} + \frac{1}{2}ab = \int_{-c}^{0}\left(b+\frac{b}{c}x\right)\cdot dx + \frac{1}{2}ab = \left(bx+\frac{bx^2}{2c}\right)\Bigg|_{-c}^{0} + \frac{1}{2}ab =$$

$$= \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}b\cdot\left(a+c\right).$$

Формула совпадает с формулой школьного курса математики $S = \frac{1}{2}a\cdot h$, где a — длина стороны треугольника, на которую опущена высота (в нашем случае равные $a + c$), h — длина высоты (в нашем случае равная b).

8. Круг.

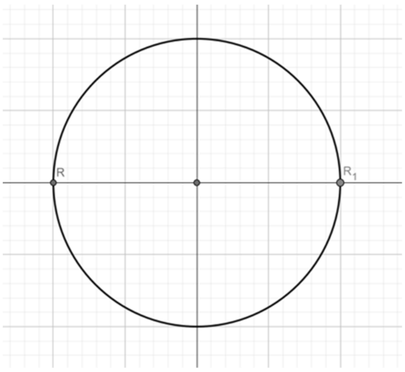

Рисунок 8 — Круг

Пусть R — радиус круга. Рассмотрим часть круга, лежащую в I и II четвертях. Тогда $y = \sqrt{R^2 - x^2}, x = R \cdot \sin t, dx = R \cdot \cos t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.:$

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt = 2 \cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2\left(1 - \sin^2 t\right)} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt = 2 \cdot 2R^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt =$$

$$= 4R^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2R^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2t\right)dt = 2R^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = \pi R^2;$$

$$S = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \int_{-R}^{R} y\Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx = 2\int_{0}^{\pi} \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \sqrt{R^2\left(1 - \sin^2 t\right)} \cdot R \cdot \cos t \cdot dt = 2R^2 \int_{0}^{\pi} \cos^2 t \cdot dt = 2R^2 \int_{0}^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = R^2 \int_{0}^{\pi} R^2\left(\pi + 0 - 0 - 0\right) = \pi R^2.$$

Формулы совпадают с формулой школьного курса математики $S = \pi R^2$, где R — радиус круга.

Заключение. С помощью определённого и двойного интеграла нами получены формулы площадей плоских фигур, изучаемых в школьном курсе математики, каждая из которых совпадает с известными формулами.