

С. І. Русан,

кандыдат тэхнічных навук, дацэнт

Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

А. Л. Полюх

Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

ДЫНАМІЧНЫ АНАЛІЗ КАЧЭННЯ ТЭХНАЛАГІЧНАГА КОЛА

Кола разглядаецца як цвёрдае цела ў працэсе раўнамернага і паскоранага качэння. Распрацавана метадыка вызначэння неабходных для яго руху па плоскасці без слізгання сіл шчаплення. Устаноўлены крытэрыі для вызначэння напрамку качэння кола і знойдзена велічыня неабходнай рухаючай сілы.

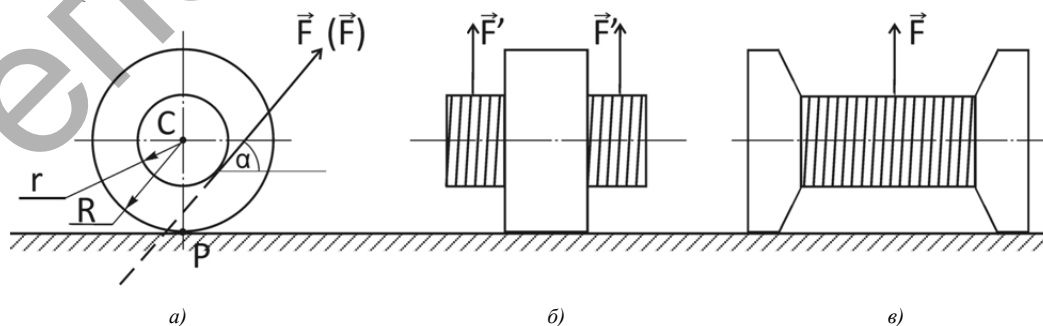
The wheel is considered as a solid body in the process of the uniform and accelerated rolling. The criterion for determination of the rolling direction is established, and the value of a necessary driving force is found. The method was developed for determining the necessary forces of adhesion, providing the wheel rolling on a plane without slipping.

Уводзіны. Тэхналагічным колам будзем мадэліраваць шырока распаўсюджаныя ў тэхніцы цэлы цыліндрычнай формы: катушкі, каткі, бухты, бабіны і інш. Ад транспартных колаў яны адрозніваюцца большай разнастайнасцю форм, размераў, спецыфікай нагрузак, умоў качэння. Транспартныя колы могуць разглядацца як прыватны варыянт тэхналагічных.

Колы будзем лічыць абсалютна цвёрдымі цэламі. Задача даследавання руху такіх аб'ектаў можа разглядацца ў вучэбным курсе тэарэтычнай механікі. Аднак там яна не выдзяляецца ў асобную тэму, таму адпаведная метадыка даследавання не распрацавана. Апісаным становішчам абумоўлены змест нашай работы. Разам з тым, актуальная распрацоўка дазваляе пашырыць тэматыку навукова-даследчай працы студэнтаў. Адзін з прыярытэтаў якасці афармлення даследавання — яго даступнасць для студэнтаў сярэдняга ўзроўню падрыхтоўкі.

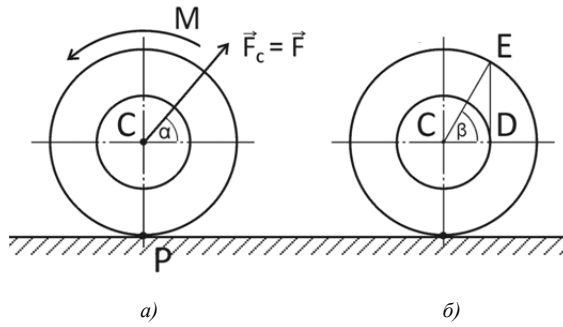
Асноўная частка. Метадыку прымянення абстрактных формул курса тэарэтычнай механікі разгледзім на канкрэтным прыкладзе. Ступенчатае кола масы m , геаметрычныя параметры якога роўныя r і R , устаноўлена на гарызантальную шурпатую плоскасць. Дзеючая на яго сіла F нахілена пад вуглом α да плоскасці (рысунак 1, а). Вугал α можа прымаць значэнні ў межах ад 0 да 90° . Каэфіцыент трэння слізгання роўны f . Момент трэння качэння M_T мы пакуль будзем лічыць роўным нулю, але далей ўвядзем для яго вызначэння каэфіцыент δ , тады будзем лічыць $M_T = \delta N$. Трэба вызначыць сілу шчаплення $F_{шч}$, неабходную для раўнамернага ці паскоранага качэння кола без слізгання.

Пачынаючы вывучэнне руху кола, неабходна выразна ўявіць яго форму ў прасторы і спосаб прыкладання сілы F . Для гэтага паказаны яго магчымы выгляд збоку (рысунак 1, б, в). Сіла F (ці $F' = F/2$) прыкладзена да канца троса, што змотваецца з цыліндра радыуса r . Значыць, яе лінія дзеяння заўжды датычна да малой акружнасці. Пры адсутнасці дастатковага досведу аналізу нават вызначэнне напрамку качэння выклікае цяжкасці. Таму вывучэнне руху кола пачнем з пошуку адказу на закранутае пытанне. Выканаем паралельны перанос сілы F з пункта A ў цэнтр кола C . Раўназначнае сіле F новае ўздзеянне на аб'ект цяпер складаецца з сілы $F_C = F$ і пары сіл з момантам $M = Fr$ (рысунак 2, а). Кожны з кампанентаў нагрузкі па рознаму ўздзейнічае на кола: сіла F_C імкнецца каціць яго ўправа, а пара M — улева. Пры гэтым момант качэння, ствараемы сілай F_C , роўны $F_C \cos \alpha R = F \cos \alpha R$.

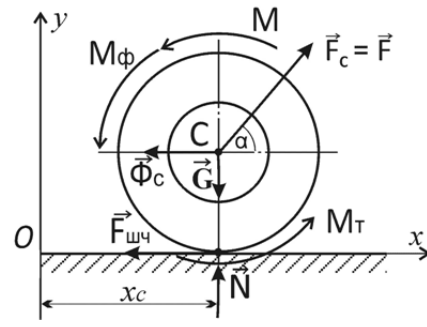


а — галоўны від; б, в — від збоку (два варыянты)

Рысунак 1 — Тэхнічнае кола пад нагрузкай



а — перанос сілы; б — пабудова гранічнага вугла β
 Рисунак 2 — Вызначэнне напрамку качэння



Рисунак 3 — Сілавое ўздзеянне на кола пры паскораным качэнні ўправа

Відавочна, што пры адсутнасці моманта трэння качэння ўмова паскоранага руху кола ўправа выражаецца няроўнасцю: $F \cos \alpha > M$, ці $R \cos \alpha > r$. Інакш: $\cos \alpha > \cos \beta$ і $\alpha < \beta$, дзе $\cos \beta = r/R$ (рысунак 2, б). Разважаючы аналагічна, прыходзім да высновы, што пры $\alpha > \beta$ кола з паскарэннем коціцца ўлева, а пры $\alpha = \beta$ кола не пачне каціцца. Вугал β , што характарызуе структуру кола, назавём гранічным. Такім чынам, напрамак качэння кола вызначаецца суадносінамі вуглоў нахілу сілы F і гранічнага вугла кола. Яго можна вызначыць і візуальна без пераносу сілы F у пункт C . Для гэтага неабходна дакладна ў пэўным маштабе нарысаваць кола і пабудаваць лінію дзеяння сілы F . Калі яна будзе перасякаць плоскасць качэння злева ад пункта P (гл. рысунак 1, а), то кола будзе каціцца ўправа, і наадварот. Калі ж лінія дзеяння рухаючай сілы пройдзе дакладна праз пункт P , то качэнне не пачнецца.

Качэнне кола без слізгання магчыма толькі пры пэўным значэнні сілы шчаплення, што ўзнікае ў плоскасці яго кантакту з паверхняй качэння. Мінімальнае значэнне такой сілы вызначым для двух відаў качэння: раўнамернага і паскоранага. Для даследавання руху кола выкарыстаем прынцып Даламбера. Для гэтага да зададзенай сілы далучым сілы інерцыі:

$$\Phi_C = ma_c = m\ddot{x}_c; \quad M_\Phi = I_{cz} \varepsilon = I_{cz} \ddot{\varphi}. \quad (1)$$

Тут захаваны абазначэнні, прынятыя ў курсе тэарэтычнай механікі. Пры паскораным качэнні ўправа (рысунак 3) паводле метада кінетастатыкі атрымаем:

$$\sum X_i = F \cos \alpha - F_{\text{шч}} - \Phi_C = 0; \quad \sum Y_i = F \sin \alpha - G + N = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_C(F_i) = F_{\text{шч}} R - M - M_T - M_\Phi = 0.$$

З кінематыкі вядома, што пры раўнамерным качэнні $a_c = 0$, $\varepsilon = 0$, таму ў формулах (1) і (2) $\Phi_C = M_\Phi = 0$. Мы пакуль лічым $M_T = 0$. Вядома, што пры руху без слізгання сіла шчаплення $F_{\text{шч}}$ можа прымаць любое значэнне ад 0 да $\pm fN$, таму знойдзенае значэнне сілы шчаплення будзе вызначаць мінімальны, патрэбны для такога руху, каэфіцыент шчаплення f . Сілу шчаплення, неабходную для раўнамернага качэння, будзем называць статычнай і абазначым літарамі $F_{\text{шч}}^{\text{ст}}$. З першага ураўнення (2) знаходзім: $F_{\text{шч}} = F_{\text{шч}}^{\text{ст}} = F \cos \alpha$.

Варта адзначыць, што раўнавага нерухомага кола ці раўнамернае качэнне магчымы толькі пры пэўным вугле $\alpha = \beta = \arccos r/R$. Раўнавага ці раўнамернае качэнне без слізгання магчымы, пакуль сіла F не перавышае максімальнага значэння, абмежаванага ўмовай $F \cos \alpha = F_{\text{шч}}^{\text{ст}} \leq fN$; раўнамернае ж качэнне са слізганнем (калі $V_C = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, але $\omega R \neq V_C$) магчыма толькі пры адзіным значэнні рухаючай сілы F : тады напрамак сілы трэння вызначаны напрамкам праслізгвання кола адносна плоскасці, а яе велічыня заўсёды роўная fN . У абодвух гэтых выпадках, з другога ўраўнення (2) $N = G - F \sin \alpha$, і тады канчаткова маем:

– без слізгання $F \cos \alpha = F_{\text{шч}}^{\text{ст}} \leq fN = f(G - F \sin \alpha)$, адсюль мінімальны патрэбны каэфіцыент трэння

$$f \geq F \cos \alpha / (G - F \sin \alpha);$$

– пры наяўнасці слізгання $F \cos \alpha = F_{\text{сл}} = fN = f(G - F \sin \alpha)$, і раўнамерны рух кола магчымы толькі пры адзіным значэнні сілы

$$F = fG / (\cos \alpha + \sin \alpha). \quad (3)$$

Мы амаль скончылі разгляд спрощанага варыянта задачы, калі лічылі $M_T = 0$. Трэба дадаць, што для агульнасці можна разгледзець вуглы дзеяння сілы ў больш шырокіх межах: $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Гэта дасць яшчэ адзін варыянт для раўнавагі кола ці яго раўнамернага руху, калі лінія дзеяння сілы таксама праходзіць праз пункт P , але ўжо накіраваная ўніз. Трэба адзначыць, што пры адмоўным α у выразе (3) для рухаючай сілы назоўнік відавочна можа ператварацца ў ноль пры $f = -\operatorname{ctg} \alpha$. Гэта значыць, што пры пэўных параметрах сістэмы раўнамернае качэнне са слізганнем стане ўвогуле немагчыма ні пры якім значэнні рухаючай сілы, ці кола можа заклініць у час руху (маецца на ўвазе амаль імгненны і вельмі значны рост сілы нацягнення тросу за кошт запасу кінетычнай энергіі).

Цяпер разгледзім момант супраціўлення качэнню, калі $M_T = \delta N \neq 0$. Тады з трэцяга ўраўнення сістэмы (2), у якім $M_T = \delta N = \delta(G - F \sin \alpha)$ атрымліваем $Fr + \delta(G - F \sin \alpha) - F \cos \alpha R = 0$; адсюль $F = \delta G / (R \cos \alpha + \delta \sin \alpha - r)$. Велічыні сіл F і $F_{\text{шч}}^{\text{ct}}$ пры качэнні кола ўправа і ўлева знаходзяцца па аднолькавых формулах, аднак значэнні сіл розныя; гэта тлумачыцца змяненнем вугла α , які ўжо не будзе роўны $\arccos r/R$ (лінія дзеяння рухаючай сілы не праходзіць праз пункт P , таму што з'явіўся дадатковы момант M_T). Пры змене правага напрамку качэння на левы необходимая сіла $F_{\text{шч}}^{\text{ct}}$ памяншаецца, а сіла F павялічваецца.

Выкарыстаем першае і трэцяе ўраўненні сістэмы (2). Выключаем з іх сілу $F_{\text{шч}}$, атрымліваем $M + M_\Phi + M_T - (F \cos \alpha - \Phi_C)R = 0$. Улічваючы, што тут спалучэнне $M_\Phi + \Phi_C R$ паводле залежнасцей (1) роўнае $I_{cz}\varepsilon + m a_c R = (I_{cz}/R + mR)a_c$, знаходзім:

$$a_c = (FR \cos \alpha - M - M_T) / (I_{cz}/R + mR) = \text{const.}$$

Цяпер зноў вяртаемся да першага ўраўнення сістэмы (2), з яго выражаем шукаемую дынамічную сілу шчаплення $F_{\text{шч}} = F \cos \alpha - \Phi_C = F \cos \alpha - m a_c$. Параўнанне з раўнамерным качэннем паказвае, што паскоранае качэнне кола прыводзіць да зніжэння сілы шчаплення на велічыню сілы інерцыі. Ва ўсіх выпадках мы можам вызначыць адпаведны мінімальны каэфіцыент трэння слізгання: $f_{\min} = F_{\text{шч}} / N$.

Заклучэнне. У даследаванні выкладзена метадыка прымянення прынцыпа Даламбера для дынамічнага аналізу раўнамернага і паскоранага качэння тэхналагічнага кола; устаноўлены крытэрыі для вызначэння напрамку качэння; вызначаны статычная і дынамічная сілы шчаплення, неабходныя для качэння кола без слізгання; указана магчымасць закліньвання пры некаторых умовах качэння са слізганнем; паказана, што сілы шчаплення могуць залежыць ад напрамку качэння.

УДК 531

С. І. Русан,

кандыдат тэхнічных навук, дацэнт

Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

Я. С. Стэцкі

Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

ДЫНАМІЧНЫ АНАЛІЗ КАЧЭННЯ ВЯДУЧАГА КОЛА ПА ПЛОСКАСЦІ З ПЕРАМЕННЫМ КАЭФІЦЫЕНТАМ ТРЭННЯ СЛІЗГАННЯ

Выкананы якасны аналіз руху кола па плоскасці з пераменным каэфіцыентам трэння слізгання. Вызначана сіла шчаплення кола з плоскасцю, неабходная для раўнамернага і паскоранага качэння. Для даследавання выкарыстаны дыферэнцыяльныя ўраўненні плоскага руху цвёрдага цела.

A qualitative analysis of the motion of the wheel plane with variable coefficient of sliding friction. Determined the bond strength with the plane of the wheel, necessary for the uniform and accelerated rolling. The study used the differential equations of plane motion of a rigid body.

Уводзіны. Даследаванне руху аб'екта выконваецца на падставе гіпотэз і ўраўненняў, выкладзеных у курсе тэарэтычнай механікі. Мэта аналізу — паглыбленае вывучэнне руху аднаго з найбольш распаўсюджаных аб'ектаў тэхнікі — кола (альбо любога цыліндрычнага цела з кругавой накіравальнай). Кінематычны аналіз яго качэння выкананы ў работах [1]. Асаблівасць разглядаемай тут задачы заключаецца ва ўліку зменнасці механічнай характарыстыкі паверхні качэння — яе шурпатасці. Апошняя апісваецца пераменным каэфіцыентам трэння слізгання $f(x)$.

Асноўная частка. Прадставім тры графікі функцыі $f(x)$: 1 — $f(x)$ узрастае; 2 — $f(x)$ змяншаецца; 3 — $f(x)$ застаецца нязменнай (рысунк 1). Пункцірнай лініяй 4 паказана мінімальнае значэнне каэфіцыента