Заключение. Асимптотическую формулу Е. В. Вороновской (4) для отклонения функции $f \in \mathbf{C}^2[0, 1]$ от её многочленов С. Н. Бернштейна $B_N f(x)$ обобщил сам С. Н. Бернштейн (5) на функции $f \in \mathbf{C}^{2k}[0, 1]$, где k = 1, 2, 3, … . Аналогично в настоящей работе асимптотическая формула С. Н. Бернштейна (3) для отклонения функции $f \in \mathbf{C}(T)$, которая имеет в точке x_0 конечные левостороннюю $f'(x_0 - 0)$ и правостороннюю $f'(x_0 + 0)$ производные, от средних Фейера (8) её тригонометрического ряда Фурье (1), обобщена нами (13) для отклонения функции $f \in \mathbf{C}^{2k}(T) \wedge (12)$, которая имеет в точке x_0 конечные односторонние производные $(2k+1)$-го порядка, от матричных средних (6) её тригонометрического ряда Фурье (1). Полученная нами асимптотическая формула (13) имеет в главной части производные чётного порядка приближаемой функции f и в случае нечётного порядка производные уже функции $\tilde{f}$, тригонометрически сопряжённой к функции *f*. В последнем заключается отличие главной части нашей асимптотической формулы (13) от главной части асимптотической формулы С. Н. Бернштейна (5). Само собой понятно, что в процессе доказательства (13) мы использовали результаты, которые первопроходцам в момент получения ими своих асимптотических формул не были известны. Напомним, что подобные исследования Ж. Дьёдонне относил к «жёсткому» анализу (“hard” analysis). Внимание молодых математиков обратим на то, что понятие сопряжённой функции ввели: для ультрасферических рядов — Макенхоупт и Стейн [82, с. 24], для рядов Эрмита — Макенхоупт [83], для рядов Лагерра — Макенхоупт [84, с. 416], для рядов Уолша — Хант [85], для рядов Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода — уже упоминавшиеся выше П. Л. Бутцер и Р. Л. Штэнс [86, с. 56], И. Йо — для рядов Дирихле [87] и разложений Штурма—Лиувилля [88].

Список цитируемых источников

1. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. М. : Мир, 1985. Т. 1. 264 с. ; Т. 2. 400 с.
2. Шварц Л. Анализ : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т. 1. С. 711 ; Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. С. 155 ; Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М. : Наука, 1987. С. 38.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
4. Там же. С. 206.
5. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.
6. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. № 4. С. 79—85 ; Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна» // Собр. соч. / С. Н. Бернштейн. М. : Изд-во АН СССР, 1954. Т/ 2 : Конструктивная теория функций. С. 153.
7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 317 ; Натансон И. П. Конструктивная теория функций. С. 246 ; Lorentz G. G. Bernstein Polynomials // Mathematical Expositions. Toronto : University of Toronto Press, 1953. № 8. P. 22 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : ГИФМЛ, 1960. С. 593 ; DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. Berlin [et. al.] : Springer, 1993. P. 307.
8. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. Сер. А. 1932. № 4. С. 79—85.
9. Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна» С. 155—158.
10. Там же.
11. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials // Mathematical Expositions. Toronto : University of Toronto Press, 1953. № 8. P. 23.
12. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.
13. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фiз.-тэхн. навук. 1962. № 1. С. 24—27.
14. Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12, № 3. С. 259—278.
15. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 281—282 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 485 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. С. 475.
16. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования.
17. Бруй И. Н. О включении метода Фейера в одну совокупность методов суммирования числовых рядов // Техника и технологии: инновации и качество : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., 24—25 окт. 2013 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2013. С. 41—56.
18. Кивинукк А.: 1) О порядке приближения периодических функций // Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. 1972. Вып. 305. С. 239 ; 2) Теоремы сравнения методов суммирования разложений Фурье в пространстве Банаха // Уч. зап. Тартус. гос. ун-та. 1978. Вып. 448. С. 32.
19. Baskakov V. A. On the degree of approximation of smooth functions by linear saturated operators // East Journal on Approximations. 1995. Vol. 1, № 4. P. 513—520.
20. Кибалко П. И. О приближении периодических функций двух переменных одним классом линейных методов суммирования двойных рядов Фурье // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фiз.-матэм. навук. 1977. № 1. С. 34—43.
21. Линейные методы суммирования рядов и интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / МГПИ им. А. М. Горького ; рук. А. К. Покало ; исполн.: И. Н. Бруй [и др.]. Минск, 1980. 47 с. Библиогр.: с. 43—47. Инв. № 0282.7045881.
22. Семенчук Н. П. Обобщённый метод суммирования интегралов Фурье дифференцируемых функций // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фiз.-матэм. навук. 1977. № 1. С. 19—24.

23. Линейные методы суммирования рядов и интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / МГПИ им. А. М. Горького ; рук. А. К. Покало ; исполн.: И. Н. Бруй [и др.]. Минск, 1980. С. 34—36 ; Об одном классе методов суммирования интегралов и сопряжённых интегралов Фурье : отчёт о НИР (заключ.) / БрГПИ им.А. С. Пушкина ; рук. Н. П. Семенчук. Брест, 1986. 14 с. Библиогр.: с. 14. Инв. № 0286.0074543.

24. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 168 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 518 ; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М. : Наука, 1965. С. 170.

25. Бруй И. Н. Асимптотические формулы типа С. Н. Бернштейна // Наука. Образование. Технологии — 2009 : материалы II Междунар. науч.-практ. конф., 10—11 сент. 2009 г., Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2009. Ч. 2. С. 28—30.

26. Харди Г. Расходящиеся ряды. М. : ИИЛ, 1951. С. 24, 62.

27. Бруй И. Н.: 1) О включении метода Фейера в одну совокупность методов суммирования числовых рядов. С. 42—43 ; 2) Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2014. № 3 (180). С. 17 ; 3) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи // Технологии, экономика и право: актуальные проблемы и инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 20 нояб. 2014 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2014. С. 18.

28. Харди Г. Расходящиеся ряды.

29. Бруй И. Н.: 1) Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда. С. 19 ; 2) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 18.

30. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. С. 221 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. М. : Мир, 1965. Т. 1. С. 82—83.

31. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики: алгебра и анализ. М. : Наука, 1971. 656 с.

32. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Mathematical Journal. 1945. Vol. 12. P. 695—704.

33. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного.

34. Baskakov V. A. On the degree of approximation of smooth functions by linear saturated operators ; Баскаков В. А.: 1) Вокруг одной асимптотической формулы С. М. Никольского и аккуратные оценки приближений // Функцион. пространства, теория приближений, нелинейн. анализ : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию акад. С. М. Никольского, 27 апр. — 3 мая 1995 г., Москва. М., 1995. С. 36—38 ; 2) О насыщении высших порядков // Теория функций и приближений : тр. 7-й Сарат. зим. шк. 30 янв. — 4 февр. 1994 г. (памяти проф. А. А. Привалова). Саратов, 1995. Ч. 1. С. 41—50 ; 3) Асимптотика приближения индивидуальных функций обобщёнными операторами Фейера // Analysis Mathematica. 1997. Vol. 23. P. 189—204.

35. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. 1950. T. 67, № 2. P. 161—198.

36. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 202 ; Alexits G. On the order of approximation by the Cesàro means of Fourier series // Approximation theory : selected papers. Budapest : Académiai kiadó, 1983. P. 48 ; Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1945. Т. 15. С. 25 ; Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejér means // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51. P. 274 ; Zamansky M. Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3 série. 1949. T. 66, № 1. P. 35.

37. Бруй И. Н. Эффективные условия на метод суммирования тригонометрических рядов Фурье в задаче о насыщении // Наука и технологии: инновации и качество : материалы Междунар. науч.-практ. конф., 24—25 нояб. 2011 г., г. Барановичи, Респ. Беларусь. Барановичи : РИО БарГУ, 2011. С. 117—123.

38. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.

39. Кивинукк А. О порядке приближения периодических функций.

40. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.

41. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций // Вес. АН Беларус. ССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1969. № 2. С. 43—50.

42. Натансон И. П.: 1) Конструктивная теория функций. С. 263 ; 2) Некоторые оценки, связанные с сингулярным интегралом Валле-Пуссена // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45. С. 290—293 ; 3) О точности представления непрерывных периодических функций сингулярными интегралами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 275 ; Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М. : ГИФМЛ, 1959. С. 131 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 593.

43. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций. С. 49 ; Баскаков В. А. Асимптотика приближения индивидуальных функций обобщёнными операторами Фейера. С. 200.

44. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. С. 125.

45. Там же. С. 21—22.

46. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation // Journal of Approximation Theory. 1999. Vol. 100, № 1. P. 157—182.

47. Турецкий А. Х. О классах насыщения в пространстве C // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25, № 3. С. 431, 433 ; Бруй И. Н. О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера / И. Н. Бруй ; Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н.». Минск, 1989. 60 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.08.1989. № 5514-В89. С. 21 // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1990. № 3. С. 115 ; Bruj I., Müller J. The concept of Faber derivative in saturation theory // Jean Journal on Approximation. 2011. Vol. 3, № 2. P. 234 ; Бруй И. Н. Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда С. 20—21.

48. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques. P. 170 ; Турецкий А. Х. О классах насыщения в пространстве C. С. 433—434.

49. Zygmund A. The approximation of functions by typical means of their Fourier series. P. 697 ; Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. С. 591.

50. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation. P. 168—169.

51. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 45 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 88 ; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. С. 105—106 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 72.

52. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. С. 45—46 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. С. 92 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 101.

53. Kolmogoroff A. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen // Annals of Mathematics. 1935. Vol. 36, № 2. P. 521—526.

54. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1.

55. Kolmogoroff A. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen.

56. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521—528.

57. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1945. Т. 15. С. 14, 23.

58. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17, № 5. С. 461—472.

59. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций.

60. Butzer P. L., Pawelke S. Ableitungen von trigonometrischen Approximationsprozessen // Acta Sci. Math. (Szeged). 1967. Vol. 28. P. 181 ; Бруй И. Н. О классе насыщения метода Рисса суммирования рядов Фабера. С. 30.

61. Там же.

62. Бруй И. Н. Оценка скорости суммируемости через скорость приближения частичными суммами и средними Зигмунда С. 18 ; Бруй І. М. Пашырэнне тэарэмы Алексіча—Кралiка на рэгулярныя метады сумавання // Вес. Беларус. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. 2004. № 1 (39). С. 21 ; Бруй И. Н. Регулярные методы суммирования тригонометрических рядов и классы дифференцируемых функций // Весн. Гродз. дзяржа. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. 2004. № 2 (28). С. 39.

63. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation.

64. Ibid. P. 170—171.

65. Покало А. К. Об одном классе линейных методов суммирования рядов Фурье дифференцируемых функций. С. 44.

66. Тиман М. Ф. О порядке приближения функции нормальными средними Зигмунда // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 1. С. 29 ; Gaier D. Approximation durch Fejér-Mittel in der Klasse A // Mitteilungen aus dem mathem. Seminar Giessen. 1977. № 123. S. 4 ; Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 236 ; Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М. : Мир, 1986. С. 65.

67. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 116 ; Натансон И. П. Конструктивная теория функций. С. 193 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 198.

68. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 112 ; Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. С. 61 ; Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. С. 115 ; Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. С. 115.

69. Тюрнпу Х. О значении функции Лебега для сходимости и суммируемости функциональных рядов почти всюду // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös. Sect. Math. 1973. T. 16. P. 125 ; Türnpu H. Lebesgue functions and summability of functional series with speed almost everywhere // Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. 1996. T. 1. P. 39—54.

70. Kövari T., Pommerenke Ch. On Faber polynomials and Faber expansions // Mathem. Zeitschr. 1967. Bd. 99, № 3. S. 199 ; Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. М. : Наука, 1984. С. 235.

71. Бруй И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи.

72. Там же. С. 26—27.

73. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций.

74. Покало А. К. К вопросу о суммировании функций классов $B^{(r)}$ // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 5. С. 750—753.

75. Бруй И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 25 ; Bruj I., Müller J. The concept of Faber derivative in saturation theory. P. 230.

76. Бруй И. Н.: 1) Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 25 ; 2) Приближение одного класса регулярных функций обобщёнными средними их рядов по полиномам Фабера // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1974. № 5. С. 46.

77. Бруй И. Н. Памяти моего научного руководителя А. К. Покало: его идеи. С. 25 ; Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation. P. 168.

78. Bruj I., Schmieder G. Best Approximation and Saturation on Domains Bounded by Curves of Bounded Rotation.

79. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives // Теория приближения функций : Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. : тр. М. : Наука, 1977. С. 49—61.

80. Zamansky M. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques.

81. Дзядык В. К.: 1) Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. С. 334 ; 2) О конструктивной теории функций на замкнутых множествах комплексной плоскости // Теория приближения функций : Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24—28 июля 1975 г. : тр. М. : Наука, 1977. С. 158.

82. Muckenhoupt B., Stein E. M. Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 118, № 6. P. 24.

83. Muckenhoupt B. Hermite conjugate expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 139. P. 256 ; Joó I.: 1) Saturation theorems for Hermite—Fourier series // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, № 1—2. P. 170 ; 2) On Hermite—Fourier series // Period. Math. Hungar. 1992. Vol. 24, № 2. P. 112.

84. Muckenhoupt B. Conjugate functions for Laguerre expansions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 147. P. 403—418.

85. Hunt R. A. Developments related to the a. e. convergence of Fourier series // Studies in harmonic analysis : Proc. of the Conf., Chicago, 1974. Washington, DC : Mathematical Association of America, 1976. P. 29 ; Joó I. On some problems of M. Horváth (saturation theorems for Walsh—Fourier expansions) // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1988. T. 31. P. 248.

86. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives. P. 56.

87. Joó I. On the conjugate function of Dirichlet series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1992. T. 35. P. 59—67.

88. Joó I. On some notions of harmonic analysis for Sturm—Liouville expansions // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1992. T. 35. P. 77—98.