

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Барановичский государственный университет»
Студенческое научное общество БарГУ

СОДРУЖЕСТВО НАУК. БАРАНОВИЧИ-2016

Материалы XII Международной
научно-практической конференции
молодых исследователей

(Барановичи, 19—20 мая 2016 года)

В трёх частях

Часть 2

Барановичи
БарГУ
2016

В части 2 сборника материалов XII Международной научно-практической конференции молодых исследователей «Содружество наук. Барановичи-2016» представлены результаты исследований в области физики и математики, а также рассмотрены актуальные проблемы в области информационных систем и технологий в образовании, науке и технике. Особое внимание уделено современным тенденциям в технологиях и материалах машиностроительного и сельскохозяйственного производств, а также экономическим аспектам развития предприятия, региона.

Сборник адресован научным работникам, аспирантам, магистрантам и студентам инженерных и экономических специальностей учреждений высшего образования.

Редакционная коллегия:

А. В. Никишова (гл. ред.), Ю. Е. Горбач, В. Н. Кременевская (отв. секретари), Е. Н. Кирюхова,
О. И. Наранович, А. К. Гавриленя, М. В. Нерода, В. Н. Познякевич, Г. Я. Житкевич

Рецензент

кандидат технических наук, заведующий лабораторией механофизики гетерогенных систем
Государственного научного учреждения «Физико-технический институт
Национальной академии наук» А. М. Милюкова

Научное издание

СОДРУЖЕСТВО НАУК.
БАРАНОВИЧИ-2016

Материалы XII Международной
научно-практической конференции
молодых исследователей

(Барановичи, 19—20 мая 2016 года)

На русском, белорусском, английском языках

В трёх частях

Часть 2

Ответственный за выпуск Е. Г. Хохол
Технический редактор А. Ю. Сидоренко
Компьютерная вёрстка С. М. Глушак
Корректор Н. Н. Колодко

Подписано в печать 04.10.2016. Формат 60 × 84 ¹/₈. Бумага ксероксная.

Отпечатано на копировально-множительной технике. Усл. печ. л. 28,00. Уч.-изд. л. 25,10. Тираж 9 экз. Заказ 681.

Учреждение образования «Барановичский государственный университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя № 1/424 от 09.09.2016.
Ул. Войкова, 21, 225404 г. Барановичи. Тел. 8 (0163) 45 46 28, e-mail: rio@barsu.by .

Список цитируемых источников

1. Классическая электроника и нанoeлектроника : учеб. пособие / А. Н. Игнатов [и др.]. 2-е изд., стер. М. : ФЛИНТА, 2012. 728 с.
2. Кластерные технологии [Электронный ресурс]. URL: http://technologies.su/klasternye_tehnologii (дата обращения: 14.03.2016).
3. Классическая электроника и нанoeлектроника.
4. Фуллерены и углеродные нанотрубки. Свойства и применение [Электронный ресурс]. URL: <http://labs.vt.tpu.ru/nano/nanotubes.htm> (дата обращения: 14.03.2016).

УДК 531

Я. С. Стэцкі, С. І. Русан

Установа адукацыі «Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт», Баранавічы

ПОЎНЫ АНАЛІЗ РУХУ КОЛА ПАД ДЗЕЯННЕМ НАХІЛЕНАЙ ЦЭНТРАЛЬНАЙ СІЛЫ

Уводзіны. У артыкуле выконваецца якасны, колькасны сілавы і кінематычны аналіз руху цвёрдага цела цыліндрычнай формы па шурпатай плоскасці, нагружанага нахіленай цэнтральнай сілай F (рысунак 1). Таўшчыня цела ў прыватным выпадку можа змяняцца ў радыяльным напрамку. Улічваюцца трэнне слізгання і трэнне качэння. Асаблівасць metodyкі даследавання заключаецца ў паглыбленым якасным аналізе сілавога ўзаемадзеяння кола з плоскасцю качэння і кінематычных характарыстык руху.

Асноўная частка. Пад поўным аналізам руху кола будзем разумець даследаванне ўсяго цыкла яго качэння ў стацыянарным і пераходных рэжымах. У адрозненне ад большасці падобных задач тут сіла нахілена да плоскасці качэння. Па гэтай прычыне яна з'яўляецца як актыўным фактарам руху кола, так і фактарам уплыву на велічыню супраціўлення з боку паверхні качэння. Кінематычныя і дынамічныя характарыстыкі качэння залежаць не толькі ад велічыні сілы, але і ад яе вугла нахілу α . Узнікае неабходнасць даследавання параметраў качэння на экстрэмум.

Паводле ўмовы задаюцца: радыус кола R , маса m , радыус інерцыі i_c , каэфіцыенты трэння слізгання і качэння f , δ і вугал α нахілу сілы F да плоскасці. Патрэбна вызначыць паскарэнне кола і неабходнае для яго качэння без слізгання значэнне сілы счাপлення $F_{сч}$, а таксама яе гранічнае значэнне $F_{сч}^*$ у стацыянарным і пераходных рэжымах руху. Мяркуюцца, што ў кожным рэжыме руху выбраныя значэнні F і α застаюцца пастаяннымі. Апісаная задача рашаецца на падставе ўраўненняў і прынцыпаў, вывучаемых у курсе тэарэтычнай механікі. Аднак metodyка вывучэння плоскага руху цела, да якога адносіцца качэнне кола, там скіравана на атрыманне аналітычных залежнасцей, і мала ўвагі прыдзяляецца іх выкарыстанню для якаснага аналізу руху аб'ектаў. Асаблівасць нашага даследавання — ў яго прыкладным накірунку.

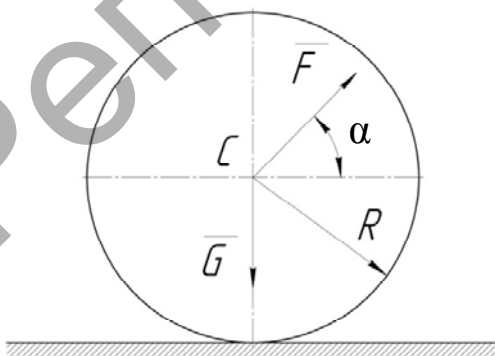
Для сілавога аналізу руху выкарыстаем метады кінемастатыкі, заснаваны на прынцыпе Даламбера [1]. Разгледзім кола ў працесе нераўнамернага качэння без слізгання. На рысунку 2 паказана сістэма сіл, што адпавядае такому руху: F — актыўная сіла; G — сіла цяжару; N — нармальная рэакцыя плоскасці; $F_{сч}$ — сіла счাপлення, неабходная для качэння без слізгання; M_T — момант супраціўлення качэнню; Φ_c, M_ϕ — сіла і момант сіл інерцыі. Літарамі a_c, ε на рысунку абазначаны паскарэнне цэнтра мас і вуглавое паскарэнне кола.

Запісваем ураўненні кінемастатыкі — сумы праекцый на восі каардынат і суму момантаў адносна цэнтра C :

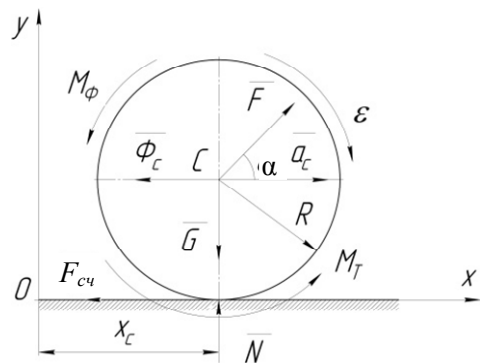
$$(F \cdot \cos \alpha - F_{сч} - \Phi_c = 0; F \cdot \sin \alpha - G + N = 0; F_{сч} \cdot R - M_T - M_\phi = 0), \quad (1)$$

дзе

$$\Phi_c = m \cdot a_c; M_\phi = I_{cZ} \cdot \varepsilon. \quad (2)$$



Рысунак 1 — Кола, нагружанае нахіленай цэнтральнай сілай F



Рысунак 2 — Нераўнамернае качэнне кола без слізгання

Тут I_{C_z} — момант інерцыі кола адносна цэнтральнай восі C_z , перпендыкулярнай да плоскасці рысунка. З кінематыкі вядома, што $a_c = \ddot{x}_c$, $\varepsilon = a_c/R = \ddot{\phi} = \dot{\omega}$, дзе ω — вуглавая скорасць кола, ϕ — яго вугал павароту.

Дынамічны аналіз качэння кола: кола можа каціцца па плоскасці без слізгання, са слізганнем ці толькі слізгаць. Характар яго руху залежыць ад фізічных уласцівасцей паверхняў судакранання кола з плоскасцю, а таксама ад знешняга ўздзеяння. Вызначым сілы счাপлення кола з плоскасцю пры раўнамерным і паскораным руху, неабходныя для качэння без слізгання.

Стацыянарны рэжым качэння. Сілу шчাপлення, неабходную для качэння без слізгання, будзем называць *статычнай*. Пры раўнамерным качэнні $a_c = \varepsilon = 0$, значыць, $\Phi_c = M_\phi = 0$. Тады з першага ўраўнення (1) атрымаем

$$F_{сч} = F_{сч}^{ст} = F \cdot \cos\alpha \quad (3)$$

Як бачым, пры $\alpha = \text{const}$ патрэбная сіла $F_{сч}$ прапарцыянальна рухаючай сіле F . Заўважым, што раўнамернае качэнне магчыма толькі пры пэўным значэнні сілы $F = F_p$. Вызначым яе з трэцяга ўраўнення сістэмы (1), у якім $M_T = \delta \cdot N = \delta \cdot (G - F_p \cdot \sin\alpha)$ (велічыня N вызначана з другога ўраўнення гэтай сістэмы). Атрымліваем: $\delta \cdot (G - F_p \cdot \sin\alpha) - F_p \cdot \cos\alpha \cdot R = 0$. Адсюль

$$F_p = \delta \cdot G / (R \cdot \cos\alpha + \delta \cdot \sin\alpha). \quad (4)$$

Пры значэнні $F < F_p$ качэнне кола не можа распачацца, але яго рух працягнецца, калі ў момант прылажэння сілы яно ўжо кацілася.

Каб пераканацца, ці дазваляць фізічныя ўласцівасці паверхняў кола і плоскасці забяспечыць сілу (3), знойдзем яе гранічнае значэнне $F_{сч}^*$ па формуле $F_{сч}^* = f \cdot N$. Атрымліваем:

$$F_{сч}^* = f \cdot (G - F \cdot \sin\alpha). \quad (5)$$

Пры $F_{сч} < F_{сч}^*$ кола будзе каціцца без слізгання.

Пераходныя рэжымы качэння. Неабходную дынамічную сілу шчাপлення знаходзім з першага ўраўнення (1) пры $\Phi_c \neq 0$:

$$F_{сч} = F_{сч}^A = F \cdot \cos\alpha - \Phi_c = F \cdot \cos\alpha - m \cdot a_c. \quad (6)$$

Параўнанне сілы $F_{сч}^A$ са значэннем $F_{сч}^{ст}$ паказвае, што *паскоранае качэнне кола прыводзіць да зніжэння сілы шчাপлення на велічыню сілы інерцыі*.

Знойдзем паскарэнне a_c , што ўваходзіць у формулу (6). Для гэтага выкарыстаем першае і трэцяе ўраўненні сістэмы (1). Выключаем з іх сілу шчাপлення: $M_\phi + M_T - (F \cdot \cos\alpha - \Phi_c) \cdot R = 0$. Тут спалучэнне $M_\phi + \Phi_c \cdot R$ паводле формул (2) роўна $I_{C_z} \cdot \varepsilon + m \cdot a_c \cdot R = (I_{C_z}/R + m \cdot R) \cdot a_c$. Таму з папярэдняй роўнасці з улікам прыведзенага вышэй значэння M_T атрымліваем

$$a_c = (R \cdot \cos\alpha + \delta \cdot \sin\alpha) \cdot R \cdot F / I - \delta \cdot R \cdot G / I. \quad (7)$$

Падстаўляем (7) у (6); знаходзім дынамічную сілу счাপлення пры паскораным качэнні:

$$F_{сч} = (I_{C_z} \cdot \cos\alpha - \delta \cdot m \cdot R \cdot \sin\alpha) \cdot F / I + \delta \cdot m \cdot R \cdot G / I. \quad (8)$$

У формулах (7) і (8) $I = m \cdot R^2 + I_{C_z}$. Калі кола, рухаючыся паскорана, набывае пэўную скорасць, а дзеянне сілы F прыпыняецца, то яно пачынае каціцца запаволена. Прымаючы ў формулах (7) і (8) $F = 0$, атрымаем адпаведныя запаволенаму качэнню паскарэнне a'_c і сілу счاپлення $F'_{сч}$:

$$a'_c = \delta \cdot R \cdot G / I; F'_{сч} = \delta \cdot m \cdot R \cdot G / I. \quad (9)$$

Поўны колькасны аналіз. Прыклад. Дадзена: $m = 150$ кг; $i_c = 30$ см; $R = 60$ см; $f = 0,3$; $\delta = 0,6$ см; $\alpha = 30^\circ$. Даследаваць паскораны рух кола, раўнамерны і запаволены.

Раішэнне. Падстаўляем прыведзеныя лікі ў формулы (7), (8) для паскоранага качэння. Атрымліваем

$$a_c = (0,4645 \cdot F - 7,8351) \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2, F_{сч} = (0,1692 \cdot F + 11,7600) \text{ Н}. \quad (10)$$

Па формулах (4) і (5) знаходзім F_p і гранічнае значэнне сілы счاپлення:

$$F_p = 16,877 \text{ Н}; F_{сч}^* = (441,0 - 0,150 \cdot F) \text{ Н}. \quad (11)$$

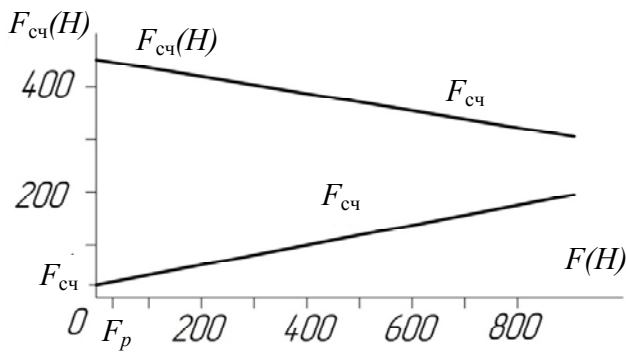


Рисунок 3 — Графік функції $F_{сч} = f(F)$

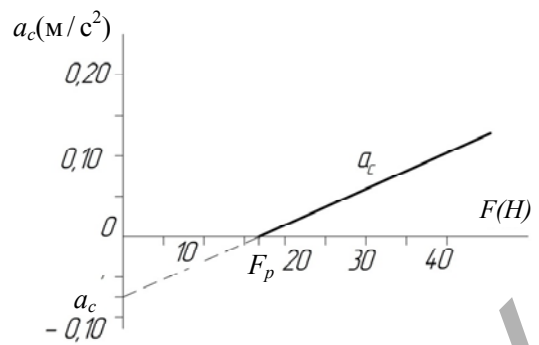


Рисунок 4 — Графік функції $a_c = f(F)$

На рисунках 3, 4 показані графіки функцій (10), (11). При відсутності початкової швидкості і $0 \leq F < F_p$ кола не коїцца. Таму частки графіка, які відповідають значенням сили $F < F_p$, не справдні. На рисунку 3 видно, що з збільшенням сили F величина $F_{сч}$ зростає, а $F_{сч}^*$ зменшується. При певному ж значенні $F = F_{сл}$ починається качення са слізганням. Величина $F_{сл}$ визначається з умови $F_{сч} = F_{сч}^*$. У нашому прикладі $F_{сл} = 1\,344,74$ Н. Значення сили $F > F_{сл}$, при якому $F_{сч}^* = 0$, абзначимо праз $F_{сл}^n$. При $F \geq F_{сл}^n$ кола можа стартавати толькi паступально, виконваючи слізгальний рух (без качення). З другої формули (11) отримуємо: $441,0 - 0,150 \cdot F_{сл}^n = 0$; адсюль $F_{сл}^n = 2940$ Н. При значеннях $F > F_{сл}^n$ кола адрывається ад плоскасці.

Аптимізація руху: величина прискорення, як видно з формули (7), залежить як ад модуля сили F , так і ад вугла яе нахілу α . Прискорення a_c прймає максімальне значення при найбільшій величині множника $f(\alpha) = R \cdot \cos\alpha + \delta \cdot \sin\alpha$. Даследуемо функцію $f(\alpha)$ на екстремум. Знаходимо $df(\alpha)/d\alpha = -R \cdot \sin\alpha + \delta \cdot \cos\alpha = 0$, адкуль $\operatorname{tg}\alpha = \delta/R$, $\alpha = \operatorname{arctg}(\delta/R)$. Далей визначаємо $d^2f(\alpha)/d\alpha^2 = -(R \cdot \cos\alpha + \delta \cdot \sin\alpha)$. Як бачимо, друга витворная функція $f(\alpha)$ адмоуная при любым α у межах $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Висновок: множник $f(\alpha)$ при $\alpha = \operatorname{arctg}(\delta/R)$ мае максімум, а адпаведнае яму значення a_c найбільше. У приведеному вищій прикладі при $\delta = 0,6$ см, $R = 60$ см величина $\delta/R = 0,01$, а вугал $\alpha = 0^\circ 34'$.

Заключення. Выкладзены ў даследаванні колькасны і якасны аналіз руху кола спрыяе як паглыбленаму разуменню самой механічнай з'явы руху аб'екта, так і засваенню методыкі даследавання сродкамі матэматыкі і фундаментальнай дысцыпліны «Тэарэтычная механіка».

Спіс цытаваных крыніц

1. Хвясцько Г. М. Курс тэарэтычнай механікі. Мінск : БДТУ, 2000. 354 с.

УДК 517.2

Е. В. Тарасюк

Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина», Брест

ОБ ИНДЕКСЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ТРЕХМЕРНОГО АНАЛОГА СИСТЕМЫ КОШИ—РИМАНА

Введение. Пусть $\Omega^{\pm} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, гомеоморфная шару, границей которой является поверхность Ляпунова, гомеоморфная сфере. Через Ω^{\pm} обозначим дополнение замыкания Ω^{\pm} .

Четырёхмерную вектор-функцию $U = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))^T$, удовлетворяющую в областях Ω^+ и Ω^- системе дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка вида